微分積分 1(微分) 自習スライド (Part 3)

積と商の微分法

鈴木 敏行

神奈川大学

2023 年 03 月 01 日

http://t21suzuki.html.xdomain.jp/

今回は

積の微分法

$$\{f(x)\,g(x)\}' = f'(x)\,g(x) + f(x)\,g'(x).$$

商の微分法

$$\left\{\frac{f(x)}{g(x)}\right\}' = \frac{f'(x)\,g(x) - f(x)\,g'(x)}{g(x)^2}.$$

これらの公式を証明し，実際に使ってみよう!

準備

(1) $f(x)$ が微分可能ならば連続!!

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \text{ が収束} \Rightarrow \lim_{h \to 0} f(x+h) = f(x).$$

(2) 基本的な導関数の公式,

基本公式

(1) $\{\alpha f(x) + \beta g(x)\}' = \alpha f'(x) + \beta g'(x)$.
(2) $(x^n)' = n\, x^{n-1}$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$.
(3) $\left(\sqrt{x}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

積の微分法の証明

$F(x) = f(x)\,g(x)$ とすれば,

$$
\begin{aligned}
&F'(x) \\
&= \lim_{h\to0} \frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \lim_{h\to0} \frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x+h) + f(x)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to0} \frac{f(x+h)\,g(x+h) - f(x)\,g(x+h) + f(x)\,g(x+h) - f(x)\,g(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to0} \left(\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\, g(x+h) \right) + \lim_{h\to0} \left(f(x)\, \frac{g(x+h)-g(x)}{h} \right) \\
&= f'(x) \underbrace{g(x)}_{\text{連続だから}} + f(x)g'(x).
\end{aligned}
$$

例 3.1. $f(x) = (x^3 - x + 2)(3x^3 - 3x - 2)$ の導関数.

積の微分法より,

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= (x^3 - x + 2)'(3x^3 - 3x - 2) + (x^3 - x + 2)(3x^3 - 3x - 2)' \\
&= (3x^2 - 1)(3x^3 - 3x - 2) + (x^3 - x + 2)(9x^2 - 3) \\
&= (3x^2 - 1)(3x^3 - 3x - 2) + (x^3 - x + 2)\,3\,(3x^2 - 1) \\
&= (3x^2 - 1)\left[(3x^3 - 3x - 2) + 3\,(x^3 - x + 2)\right] \\
&= (3x^2 - 1)(3x^3 - 3x - 2 + 3x^3 - 3x + 6) \\
&= (3x^2 - 1)(6x^3 - 6x + 4) = 2(3x^2 - 1)(3x^3 - 3x + 2).
\end{aligned}
$$

無理して因数分解しようとまで思わなくてよい.

例 3.2. $f(x) = (x^4 - 3x^2 + 5)^2$ の導関数.

$f(x) = (x^4 - 3x^2 + 5)(x^4 - 3x^2 + 5)$ だから, 積の微分法より,

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= (x^4 - 3x^2 + 5)'(x^4 - 3x^2 + 5) + (x^4 - 3x^2 + 5)(x^4 - 3x^2 + 5)' \\
&= (4x^3 - 6x)(x^4 - 3x^2 + 5) + (x^4 - 3x^2 + 5)(4x^3 - 6x) \\
&= 2(4x^3 - 6x)(x^4 - 3x^2 + 5) \\
&= 2 \times 2x\,(2x^2 - 3)(x^4 - 3x^2 + 5) \\
&= 4x\,(2x^2 - 3)(x^4 - 3x^2 + 5).
\end{aligned}
$$

実は, 一般に次の公式が成り立つ.

$$\{f(x)^n\}' = n\,f(x)^{n-1} f'(x).$$

これは合成関数の微分法の特殊な例になる.

$n=2$ のとき,

$$\begin{aligned}\{f(x)^2\}' &= \{f(x)\,f(x)\}' = \{f(x)\}'\,f(x) + f(x)\,\{f(x)\}' \\ &= f'(x)\,f(x) + f(x)\,f'(x) = 2f(x)\,f'(x).\end{aligned}$$

$n=3$ のとき,

$$\begin{aligned}\{f(x)^3\}' &= \{f(x)^2\,f(x)\}' = \{f(x)^2\}'\,f(x) + f(x)^2\,\{f(x)\}' \\ &= 2f(x)f'(x)\,f(x) + f(x)^2\,f'(x) = 3f(x)^2\,f'(x).\end{aligned}$$

あとは数学的帰納法を用いれば正当化できる.

例 3.3. $f(x) = (x^2 - 3x)\sqrt{x}$ の導関数.

積の微分法より,

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= (x^2 - 3x)'(\sqrt{x}) + (x^2 - 3x)(\sqrt{x})' \\
&= (2x - 3)\sqrt{x} + (x^2 - 3x)\frac{1}{2\sqrt{x}} \\
&= (2x - 3)\frac{2x}{2\sqrt{x}} + (x^2 - 3x)\frac{1}{2\sqrt{x}} \\
&= \frac{(2x - 3)2x + (x^2 - 3x)}{2\sqrt{x}} = \frac{4x^2 - 6x + x^2 - 3x}{2\sqrt{x}} \\
&= \frac{5x^2 - 9x}{2\sqrt{x}}.
\end{aligned}
$$

もちろん, 因数分解や約分などして $f'(x) = \dfrac{1}{2}(5x - 9)\sqrt{x}$ としてもよい.

積の微分法の公式の理解は微分 そのまま，そのまま 微分でよいが，

片方は微分，もう片方はそのまま，というのを全部足せばよい

でも構わない．実は，

$$\{f(x)\,g(x)\,h(x)\}' = f'(x)\,g(x)\,h(x) + f(x)\,g'(x)\,h(x) + f(x)\,g(x)\,h'(x).$$

何人かは間違うことであるが，くれぐれも，

$$\{f(x)\,g(x)\}' = f'(x)g'(x)$$

とすることがないように!!

商の微分法の証明

まず, $F(x) = \dfrac{1}{g(x)}$ の導関数を求める.

$$
\begin{aligned}
F'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{g(x+h)} - \frac{1}{g(x)}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{g(x)-g(x+h)}{g(x+h)g(x)}}{h} \quad \frac{\times g(x+h)g(x)}{\times g(x+h)g(x)} \\
&= \lim_{h\to 0} \Big(- \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \frac{1}{g(x)g(x+h)} \Big) \\
&= -g'(x) \times \frac{1}{\underset{\text{連続!}}{g(x)g(x)}} = -\frac{g'(x)}{g(x)^2}.
\end{aligned}
$$

ここで, $\dfrac{f(x)}{g(x)} = f(x) \times \dfrac{1}{g(x)}$ なので, 積の微分法から,

$$\left\{\frac{f(x)}{g(x)}\right\}' = \{f(x)\}'\frac{1}{g(x)} + f(x)\left\{\frac{1}{g(x)}\right\}' = f'(x)\frac{1}{g(x)} + f(x) \times -\frac{g'(x)}{g(x)^2}$$
$$= \frac{f'(x)}{g(x)} - \frac{f(x)g'(x)}{g(x)^2} = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}.$$

公式を理解する際に, マイナスの位置や, 分子分母の順で
微分そのまま − そのまま微分となっていることに注意してほしい.

積の微分法以上に商の微分法を勘違いする人が多いので, くれぐれも,

$$\left\{\frac{f(x)}{g(x)}\right\}' = \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

とすることがないように!!
というのも, のちに $\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ を考える機会があるためである.

例 3.4. $f(x) = \dfrac{3x-4}{x^2-2x+5}$ の導関数.

商の微分法より,

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{(3x-4)'\left(x^2-2x+5\right)-(3x-4)\left(x^2-2x+5\right)'}{\left(x^2-2x+5\right)^2} \\
&= \frac{(3)\left(x^2-2x+5\right)-(3x-4)(2x-2)}{\left(x^2-2x+5\right)^2} \\
&= \frac{3x^2-6x+15-\left(6x^2-6x-8x+8\right)}{\left(x^2-2x+5\right)^2} \\
&= \frac{3x^2-6x+15-6x^2+6x+8x-8}{\left(x^2-2x+5\right)^2} = \frac{-3x^2+8x+7}{\left(x^2-2x+5\right)^2}.
\end{aligned}
$$

分子は展開して整理した方がいいかもしれない.
分母はわざわざ展開する必要はない.

例 3.5. $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{x+1}$ の導関数.

商の微分法より,

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{(\sqrt{x})'\,(x+1)-(\sqrt{x})\,(x+1)'}{(x+1)^2} = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}\,(x+1)-\sqrt{x}\,(1)}{(x+1)^2} \\
&= \frac{\frac{x+1}{2\sqrt{x}}-\frac{\sqrt{x}\times2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}}{(x+1)^2} = \frac{\frac{x+1-2x}{2\sqrt{x}}}{(x+1)^2}\,\frac{\times2\sqrt{x}}{\times2\sqrt{x}} \\
&= \frac{-x+1}{2\sqrt{x}(x+1)^2}.
\end{aligned}
$$

ところで

前回 $\left(\sqrt[n]{x}\right)' = \left(x^{\frac{1}{n}}\right)' = \dfrac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1}$ を証明し,
一般に $(x^a)' = a x^{a-1}$ であると紹介した.

積や商の微分法を証明したので, a が有理数の場合に示してみよう.

はじめに, $(x^0)' = (1)' = 0 = 0\, x^{0-1}$ に注意する.

積の微分法から $\{f(x)^n\}' = n\, f(x)^{n-1} f'(x)$. m, n が正の整数のとき,

$$\begin{aligned}\left(x^{\frac{n}{m}}\right)' &= \left\{\left(x^{\frac{1}{m}}\right)^n\right\}' = n\left(x^{\frac{1}{m}}\right)^{n-1}\left(x^{\frac{1}{m}}\right)' = n\, x^{\frac{n-1}{m}}\ \frac{1}{m} x^{\frac{1}{m}-1} \\ &= \frac{n}{m} x^{\frac{n-1}{m}+\left(\frac{1}{m}-1\right)} = \frac{n}{m} x^{\frac{n}{m}-1}.\end{aligned}$$

商の微分法から, m, n が正の整数のとき,

$$\left(x^{\frac{-n}{m}}\right)' = \left(x^{-\frac{n}{m}}\right)' = \left\{\frac{1}{x^{\frac{n}{m}}}\right\}' = \frac{(1)'\left(x^{\frac{n}{m}}\right) - (1)\left(x^{\frac{n}{m}}\right)'}{\left(x^{\frac{n}{m}}\right)^2}$$

$$= \frac{0\left(x^{\frac{n}{m}}\right) - 1\,\frac{n}{m}x^{\frac{n}{m}-1}}{x^{\frac{2n}{m}}} = \frac{-\frac{n}{m}x^{\frac{n}{m}-1}}{x^{\frac{2n}{m}}} = -\frac{n}{m}x^{\frac{n}{m}-1}x^{-\frac{2n}{m}}$$

$$= -\frac{n}{m}x^{\frac{n}{m}-1-\frac{2n}{m}} = -\frac{n}{m}x^{-\frac{n}{m}-1} = \frac{-n}{m}x^{\frac{-n}{m}-1}.$$

以上から, m が正の整数, n が整数 (正負関わらず) のとき,

$$\left(x^{\frac{n}{m}}\right)' = \frac{n}{m}x^{\frac{n}{m}-1}.$$

a が有理数とは限らない場合は, 別の手段を利用しないといけない.

例 3.6. 次の関数を微分しなさい. $f(x)=\dfrac{4}{x\sqrt{x}}$.

$f(x)=\dfrac{4}{x^1 x^{\frac{1}{2}}}=4\,x^{-1-\frac{1}{2}}=4\,x^{-\frac{3}{2}}$ だから,

$$f'(x)=4\times-\frac{3}{2}x^{-\frac{3}{2}-1}=-6\,x^{-\frac{5}{2}}.$$

わざわざ根号や分数の形に戻す必要はない.

まとめ

次の微分公式をしっかり押さえておこう!

(1) $\{f(x)\,g(x)\}' = f'(x)\,g(x) + f(x)\,g'(x)$ (積の微分法).

(2) $\left\{\dfrac{f(x)}{g(x)}\right\}' = \dfrac{f'(x)\,g(x) - f(x)\,g'(x)}{g(x)^2}$ (商の微分法).

(3) $(x^a)' = ax^{a-1}$ (a は実数) — 有理数の場合に正当化できた!

公式は覚えようとして覚えるのではなく, まずはたくさん使ってあげよう.

慣れないうちは公式を見ながらでも問題ない.

途中式を省略せずしっかり書くことをお勧めする.

おまけ: 数列の和と無限級数と微分

$f(x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1} + x^n$ とする.

等比数列の和の公式より $f(x) = \dfrac{x^{n+1} - 1}{x - 1}$ $(x \neq 1)$ である.

$f'(x)$ を考えると,

$$\left(\frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}\right)' = \frac{(x^{n+1} - 1)'(x - 1) - (x^{n+1} - 1)(x - 1)'}{(x - 1)^2}$$

$$= \frac{(n+1)x^n(x - 1) - (x^{n+1} - 1)}{(x - 1)^2}$$

$$= \frac{(n+1)x^{n+1} - (n+1)x^n - x^{n+1} + 1}{(x - 1)^2} = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(x - 1)^2}.$$

$$\therefore 1 + 2x + 3x^2 + \cdots + (n-1)x^{n-2} + nx^{n-1} = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(x - 1)^2}.$$

この計算を苦労して計算した人もいるのではなかろうか.

もし, $-1 < x < 1$ のとき, $\lim_{n\to\infty} x^n = 0$, $\lim_{n\to\infty} nx^n = 0$ だから,

$$1 + 2x + 3x^2 + \cdots + nx^{n-1} + \cdots = \frac{1}{(x-1)^2} = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

一方, $-1 < x < 1$ のとき,

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1} + \cdots = \frac{1}{1-x}.$$

ここで,

$$\left(\frac{1}{1-x}\right)' = \frac{(1)'(1-x) - (1)(1-x)'}{(1-x)^2} = \frac{0(1-x) - (1)(-1)}{(1-x)^2} = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

本来, 無限級数も極限値だし, 微分も極限値だから, どっちの極限値を先に計算するかによって答えが変わる可能性がある. この場合は問題なかった.

ちなみに,

$$
\begin{array}{rl}
& \dfrac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots + \qquad nx^{n-1} + (n+1)x^n \cdots \\
-) & \dfrac{1}{1-x} = 1 + \ \ x + \ \ x^2 + \cdots + \qquad x^{n-1} + \qquad x^n \cdots \\
\hline
& \qquad\qquad x + 2x^2 + \cdots + (n-1)x^{n-1} + \qquad nx^n \cdots
\end{array}
$$

したがって,

$$
x + 2x^2 + \cdots + (n-1)x^{n-1} + nx^n + \cdots = \frac{1}{(1-x)^2} - \frac{1}{1-x} = \frac{x}{(1-x)^2}.
$$

このような計算は奥が深いので, いろいろと試してほしいものである.