# 微分積分 1(微分) 自習スライド (Part 9)
## 平均値の定理

鈴木 敏行

神奈川大学

2023 年 03 月 01 日



http://t21suzuki.html.xdomain.jp/

# 接線

接線というのは, 見た目でいえば接している線であるが,
その点の近くを直線で近似したときの直線のことを接線といった.

## 接線の方程式

$(a, f(a))$ における $y = f(x)$ の接線の方程式は $y = f'(a)(x - a) + f(a)$.

整理したときに $y = Ax + B$ のような形になるようにすること.

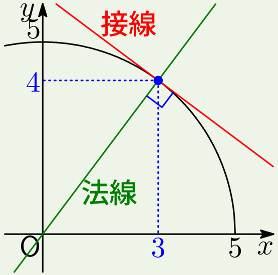
## 例 9.1. $y=\sqrt{25-x^2}$ の $(3,4)$ における接線の方程式.

まず, $(3,4)$ は $y=\sqrt{25-x^2}$ 上の点である.
$f(x)=\sqrt{25-x^2}$ とおくと,

$$f'(x)=\frac{-x}{\sqrt{25-x^2}},\quad f'(3)=\frac{-3}{\sqrt{25-9}}=-\frac{3}{4}.$$

接線の方程式は

$$\begin{aligned} y&=-\frac{3}{4}(x-3)+4=-\frac{3}{4}x+\frac{9+16}{4}\\ &=-\frac{3}{4}x+\frac{25}{4}.\\ \therefore\ y&=-\frac{3}{4}x+\frac{25}{4}. \end{aligned}$$



# 法線

接線に直交する直線を法線という.

傾きが $m$ の直線と直交する直線の傾きは $-\dfrac{1}{m}$ である.

## 法線の方程式

$(a, f(a))$ における $y = f(x)$ の法線の方程式は $y = -\dfrac{1}{f'(a)}(x-a) + f(a)$.

ただし, $f'(a) = 0$ のときは, 法線の方程式は $x = a$ である.

## 例 9.2. $y = \sqrt{25 - x^2}$ の $(3, 4)$ における法線の方程式.

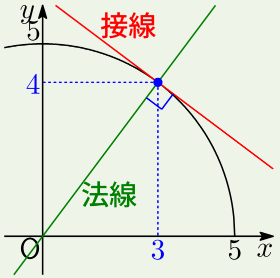
先ほどの例で同じ点における接線を
求めたので，その計算を利用する.

$f'(3) = -\dfrac{3}{4}$ であった.

法線の方程式は

$$y = \frac{4}{3}(x-3) + 4 = \frac{4}{3}x - 4 + 4 = \frac{4}{3}x.$$

$$\therefore\ y = \frac{4}{3}x.$$



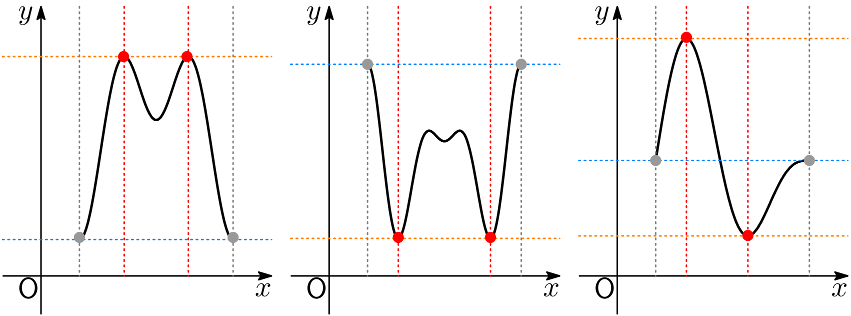

円の接線は半径と直交するということが計算からもわかった.

# 平均値の定理

話は変わって，今度は平均値の定理について考えてみたい．
平均値の定理を考えるうえで，次が一番本質的なものである．

## ロルの定理 (Rolle)

$f(x)$ は $a \leqq x \leqq b$ で連続，$a < x < b$ で微分可能とする．
さらに，$f(a) = f(b)$ とする．
このとき，$f'(c) = 0$ となる $c$ が $a < x < b$ にある．



# ロルの定理の証明

$f(x)$ が定数関数である場合は, $f'(x) = 0$ なので,
$a < x < b$ である $x$ をどれでもいいから $c$ とみなせばよい.

以下, $f(x)$ は定数関数ではないとする.
$f(x)$ は連続関数だったから, 最大値と最小値が存在する.
定数関数ではないのだから, 最大値と最小値は異なる値である.

$f(a) = f(b)$ が最小値ではない場合, 最小値を $f(c)$ とする.
$a < c < b$ に注意する. $f(c) \leqq f(x)$ なので,

$$x > c \text{ のとき}, \ \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geqq 0 \ (\text{分母}+, \text{分子}+), \ \lim_{x \to c+0} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geqq 0.$$

$$x < c \text{ のとき}, \ \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leqq 0 \ (\text{分母}-, \text{分子}+), \ \lim_{x \to c-0} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leqq 0.$$

$x = c$ で微分可能であるから, 右極限も左極限も同じ $f'(c)$ になる.
$f'(c) \geqq 0$ と $f'(c) \leqq 0$ とを合わせると $f'(c) = 0$.

$f(a) = f(b)$ が最大値ではない場合, 最大値を $f(c)$ とする.
$a < c < b$ に注意する. $f(c) \geqq f(x)$ なので,

$x > c$ のとき, $\dfrac{f(x) - f(c)}{x - c} \leqq 0$ (分母+, 分子−), $\displaystyle\lim_{x \to c+0} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leqq 0.$
$x < c$ のとき, $\dfrac{f(x) - f(c)}{x - c} \geqq 0$ (分母−, 分子−), $\displaystyle\lim_{x \to c-0} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geqq 0.$

$x = c$ で微分可能であるから, 右極限も左極限も同じ $f'(c)$ になる.
$f'(c) \leqq 0$ と $f'(c) \geqq 0$ とを合わせると $f'(c) = 0$.

以上から $f'(c) = 0$ となる $c$ を見つけることができた! (証明終了)

このロルの定理を用いて, 平均値の定理を示すが,
その平均値の定理の一般化がテイラー展開である.

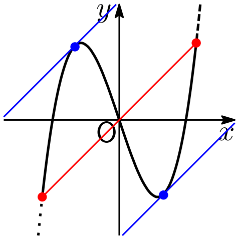
# ラグランジュの平均値の定理

高校のときに学んだ人も多いであろう, 平均値の定理は次のものである.

## ラグランジュの平均値の定理 (Lagrange)

$f(x)$ は $a \leqq x \leqq b$ で連続, $a < x < b$ で微分可能とする.
このとき, 次を満たす $c$ が存在する.

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a), \quad a < c < b.$$



# ラグランジュの平均値の定理の証明

$F(x) = f(x) - f(a) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$ とおく.

$F(x)$ は $a \leqq x \leqq b$ で連続, $a < x < b$ で微分可能であり,
$F(a) = 0$, $F(b) = 0$ である.

ロルの定理から $F'(c) = 0$ となる $c$ が $a < x < b$ にある.

$$0 = F'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}. \quad \therefore\ f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

ゆえに, $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$ となる $c$ が見つけられた. (証明終了)

---

ちなみに, $(a, f(a))$, $(b, f(b))$ を通る直線の方程式が

$$y = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a)$$

ということから, $F(x)$ は $y = f(x)$ とこの直線との差を表している.

$a < x < b$ で微分可能という条件は外せない!

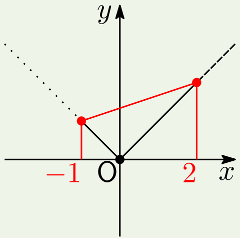
## 例 9.3.

$f(x) = |x|$ は $x = 0$ では微分可能ではないが,

$$f'(x) = \begin{cases} -1 & x < 0, \\ 1 & x > 0. \end{cases}$$

$a = -1$, $b = 2$ とすれば,

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{|2| - |-1|}{2 - (-1)} = \frac{2 - 1}{2 + 1} = \frac{1}{3}.$$




$f'(x) = \dfrac{1}{3}$ となるような $x$ は存在しない!!

# コーシーの平均値定理

この先, テイラーの定理などを示す際に使える,
より一般化された平均値の定理を紹介したい.

## コーシーの平均値定理 (Cauchy)

$f(x)$ および $g(x)$ は $a \leqq x \leqq b$ で連続, $a < x < b$ で微分可能とする.
このとき, 次を満たす $c$ が存在する.

$$[f(b) - f(a)]\, g'(c) = f'(c)\, [g(b) - g(a)], \quad a < c < b.$$

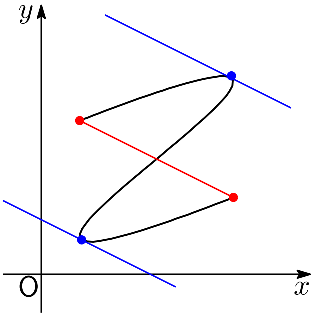
もし, $g(a) \neq g(b)$ であり, $f'(x)$ と $g'(x)$ が同時に 0 になることがない場合には次のように書ける.

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}, \quad a < c < b.$$

コーシーの平均値定理は

$$x = g(t), \quad y = f(t)$$

と媒介変数表示される曲線について，
2 点を結ぶ直線の傾きと同じ接線が作れる
ことを意味する定理だと考えてよい．



# コーシーの平均値定理の証明

$F(x) = [f(b) - f(a)]\,[g(x) - g(a)] - [f(x) - f(a)]\,[g(b) - g(a)]$ とおく.

$F(x)$ は $a \leqq x \leqq b$ で連続, $a < x < b$ で微分可能であり,
$F(a) = 0$, $F(b) = 0$ である.

ロルの定理から $F'(c) = 0$ となる $c$ が $a < x < b$ にある.

$$0 = F'(c) = [f(b) - f(a)]\,g'(c) - f'(c)\,[g(b) - g(a)].$$

ゆえに, $[f(b) - f(a)]\,g'(c) = f'(c)\,[g(b) - g(a)]$ となる $c$ が
$a < x < b$ から見つけられた.

今度は次の式を変形したい.

$$[f(b) - f(a)]\,g'(c) = f'(c)\,[g(b) - g(a)]$$

もし, $g(a) \neq g(b)$ であり, $f'(x)$ と $g'(x)$ が同時に 0 になることがない場合,
まず, $g'(c) \neq 0$ になることに注意する.

$g'(c) = 0$ であれば, $0 = f'(c)\,[g(b) - g(a)]$ なので
$g(a) \neq g(b)$ から $f'(c) = 0$ がわかってしまう.
しかし, これは $f'(x)$ と $g'(x)$ とが同時に 0 にはならないということに矛盾する.

したがって, 両辺を $g'(c)\,[g(b) - g(a)] \neq 0$ で割れば $\dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$
と書ける. (証明終了)

$f(x)$ および $g(x)$ は $a \leqq x \leqq b$ で連続, $a < x < b$ で微分可能とする.
$g(a) \neq g(b)$ であり, $f'(x)$ と $g'(x)$ が同時に 0 になることがないとする.
このとき, 次を満たす $c$ が存在する.

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}, \quad a < c < b.$$

なお, $g'(x) \neq 0$ であるならば, 自動的に変形できることに注意すること.
まず, $f'(x)$ と $g'(x)$ が同時に 0 になることがないのは当然である.
また, ラグランジュの平均値定理から

$$g(b) - g(a) = g'(c_0)\,(b - a)$$

となる $c_0$ が存在するが, $g'(x) \neq 0$, $a \neq b$ だから $g'(c_0)\,(b - a) \neq 0$. これは $g(a) \neq g(b)$ を意味する.

$f(x)$ および $g(x)$ は $a \leqq x \leqq b$ で連続, $a < x < b$ で微分可能とし,
$g'(x) \neq 0$ とする.
このとき, 次を満たす $c$ が存在する.

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}, \quad a < c < b.$$

## 例 9.4. $f(t) = \dfrac{1}{2}t^3 - 3t$, $g(t) = 3t - t^3$.

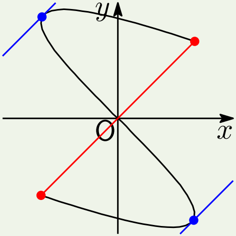
$t = -2$ と $t = 2$ とを結んでみる. ($a = -2$, $b = 2$)

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{-2-2}{-2-2} = \frac{-4}{-4} = 1. \quad \frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{\frac{3}{2}c^2 - 3}{3 - 3c^2} = \frac{c^2 - 2}{2(1 - c^2)}.$$

$\dfrac{f'(c)}{g'(c)} = 1$ となるのは

$$\frac{c^2 - 2}{2(1 - c^2)} = 1. \quad c^2 - 2 = 2 - 2c^2.$$

$$3c^2 = 4. \quad \therefore\ c = \pm\frac{2}{\sqrt{3}}.$$



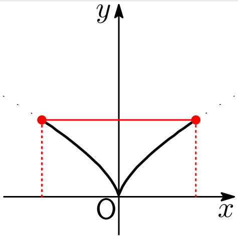
2 点を結ぶ直線と平行な接線が作れる, と思うと, 困ったことも起こる.

**例 9.5.** $f(t) = t^2$, $g(t) = t^3$ とする.

$t = -1$ と $t = 1$ とを結んでみる. $(a = -1,\ b = 1)$

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{1 - 1}{1 - (-1)} = \frac{0}{2} = 0. \quad \frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{2c}{3c^2} = \frac{2}{3c}.$$

$\dfrac{f'(c)}{g'(c)} = 0$ となるところはない.




これは $f'(0) = 0$, $g'(0) = 0$ と
同時に微分が 0 になることがあるため.

# テイラーの定理 (Taylor)

接線の方程式は, 関数を 1 次関数で近似するものであった.
これを多項式関数に一般化したものがテイラーの定理である.

$f(x)$ は $a \leqq x \leqq b$ で $C^n$ 級とする.
このとき, 次を満たす $c$ が存在する.

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(b-a)^n, \quad a < c < b.$$

同様にして, $a$ と $b$ をひっくり返したものも成立する.
(証明の方法がほとんど同じなので, 証明は省略する).

$f(x)$ は $b \leqq x \leqq a$ で $C^n$ 級とする.
このとき, 次を満たす $c$ が存在する.

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(b-a)^n, \quad b < c < a.$$

2 つの関数を考え, コーシーの平均値定理を何度も使う.

$$F(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$
$$= f(x) - f(a) - f'(a)(x-a) - \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 - \cdots$$
$$- \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1}, \qquad G(x) = (x-a)^n.$$

まず, $F(a) = 0$, $G(a) = 0$ に注意する.
コーシーの平均値定理から次を満たす $c_1$ がある.

$$\frac{F(b)}{G(b)} = \frac{F(b)-F(a)}{G(b)-G(a)} = \frac{F'(c_1)}{G'(c_1)}, \quad a < c_1 < b.$$

ここで,

$$F'(x) = f'(x) - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{(k-1)!}(x-a)^{k-1}, \quad G'(x) = n(x-a)^{n-1}.$$

特に, $F'(a) = 0$, $G'(a) = 0$ である.
コーシーの平均値定理から次を満たす $c_2$ がある.

$$\frac{F'(c_1)}{G'(c_1)} = \frac{F'(c_1) - F'(a)}{G'(c_1) - G'(a)} = \frac{F''(c_2)}{G''(c_2)}, \quad a < c_2 < c_1.$$

以下, これを繰り返していく.

コーシーの平均値定理を $n$ 回用いると,
次を満たす $c_n$ があることがわかる.

$$\frac{F(b)}{G(b)} = \frac{F'(c_1)}{G'(c_1)} = \frac{F''(c_2)}{G''(c_2)} = \cdots = \frac{F^{(n)}(c_n)}{G^{(n)}(c_n)},$$
$$a < c_n < \cdots < c_2 < c_1 < b.$$

$F^{(k)}(a) = 0$, $G^{(k)}(a) = 0$ $(k = 1, 2, \cdots n-1)$ である.

一方, $F^{(n)}(x) = f^{(n)}(x)$, $G^{(n)}(x) = n!$.
したがって,

$$\frac{F(b)}{G(b)} = \frac{f^{(n)}(c_n)}{n!}. \quad \therefore\ F(b) = \frac{f^{(n)}(c_n)}{n!}G(b) = \frac{f^{(n)}(c_n)}{n!}(b-a)^n.$$

$F(b)$ を書き直すと,

$$\begin{aligned} & f(b) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k \\ = {} & f(b) - f(a) - f'(a)(b-a) - \frac{f''(a)}{2}(b-a)^2 - \cdots \\ & - \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(b-a)^{n-1}. \end{aligned}$$

$f(b)$ 以外の項を移項することで, テイラーの定理に必要な式が証明できた. (証明終了)

以上の証明の流れがつかめないという人は $n=3$ や $n=4$ の場合の式変形をしっかり書くことをお勧めする.

$n=3$ のとき

$$F(x) = f(x) - f(a) - f'(a)(x-a) - \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2, \quad G(x) = (x-a)^3.$$

ある数の近似値を誤差限界を見積もりながら計算することができる.

**例 9.6. $e$ の近似値.**

テイラーの定理に $f(x) = e^x$, $a = 0$, $b = 1$ とすれば,
次を満たす $c$ があることがわかる.

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{(n-1)!} + \frac{e^c}{n!}, \quad 0 < c < 1.$$

ここで, $1 < e < 3$ は $e$ の定義からわかっている. したがって,

$$1 + 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{(n-1)!} + \frac{1}{n!} < e < 1 + 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{(n-1)!} + \frac{3}{n!}.$$

試しに $n=5$ とすれば, $e=2.7\ldots$ がわかる.

$$
\begin{aligned}
1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{24}+\frac{1}{120}&=\frac{163}{60}=2.71666\ldots,\\
1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{24}+\frac{3}{120}&=\frac{41}{15}=2.7333\ldots.
\end{aligned}
$$

今度は $n=7$ とすれば, $e=2.718\ldots$ がわかる.

$$
\begin{aligned}
1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{24}+\frac{1}{120}+\frac{1}{720}+\frac{1}{5040}&=\frac{685}{252}=2.718253968253968\ldots,\\
1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{24}+\frac{1}{120}+\frac{1}{720}+\frac{3}{5040}&=\frac{6851}{2520}=2.718650793650794\ldots.
\end{aligned}
$$

実際, $e=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}=1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{n!}+\cdots$ であり,
$e=2.718281828459045\ldots$ が計算できる.

# テイラー展開

テイラーの定理で $b$ が $a$ より大きいか小さいか関係なしに成立するので，これを変数 $x$ に変えることで

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-a)^n,$$

となる $c$ が $a$ と $x$ との間にあることがわかる．

※ $c$ は $x$ によって変化することに注意すること．

ここで，最後の $R_n = \dfrac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-a)^n$ を**剰余項**という．

剰余項が充分小さいということがわかれば，充分大きな $n$ に対し

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

と見てもいいということになる．

実は，接線の方程式を求める作業は，1 次のテイラー展開を求める作業とほとんど同じである．

**無限級数**

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n$$

を $f(x)$ のテイラー展開もしくはテイラー級数という.

$a = 0$ の場合,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

を $f(x)$ のマクローリン展開もしくはマクローリン級数という.

テイラー: Taylor / マクローリン: Maclaurin

テイラー展開やマクローリン展開が元の $f(x)$ と同じになるのかについては剰余項が充分小さいかを見ないといけない.

さて，もし，関数 $f(x)$ がマクローリン展開のように

$$f(x) = c_0 + c_1\,x + c_2\,x^2 + \cdots + c_n\,x^n + \cdots$$

と表されたとする．このとき，$f(0) = c_0$.

$$f'(x) = c_1 + 2\,c_2\,x + \cdots + n\,c_n\,x^{n-1} + \cdots$$

だから $f'(0) = c_1$.

$$f''(x) = 2\,c_2 + 6\,c_3\,x + \cdots + n(n-1)\,c_n\,x^{n-2} + \cdots$$

だから $f''(0) = 2\,c_2$，すなわち $c_2 = \dfrac{f''(0)}{2}$.

$$f'''(x) = 6\,c_3 + 24\,c_4\,x + \cdots + n(n-1)(n-2)\,c_n\,x^{n-3} + \cdots$$

だから $f'''(0) = 6\,c_2$，すなわち $c_3 = \dfrac{f'''(0)}{6}$.

以上の計算を考慮すれば, $c_n = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$ である.

このようにマクローリン展開の係数が単に $n$ 回微分したものだけでなく, $n!$ で割ったものであることには注意してほしい.

具体的な関数のマクローリン展開は次回しっかりやることにする.