

微分積分 1(微分) 自習スライド (Part 10)

マクローリン展開

鈴木 敏行

神奈川大学

2023 年 03 月 01 日

※ 転載や再配布を禁止する.

<http://t21suzuki.html.xdomain.jp/>

今回は、具体的な関数のマクローリン展開 (マクローリン級数) を求めてみよう.

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + R_n, \quad R_n = \frac{f^{(n)}(c)}{n!} x^n$$

(c は 0 と x との間にある数).

n 回微分したものに 0 を代入して $n!$ で割ったものが x^n の係数ということに注意する.

これから紹介するいくつかの関数については、関数が多項式で近似されていく様子を現した動画を用意している.
ぜひ参照していただければありがたい.

例 10.1. $f(x) = e^x$.

$f^{(n)}(x) = e^x$ だから, $f^{(n)}(0) = e^0 = 1$.

したがって, マクローリン展開は

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n = 1 + 1x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + \cdots$$

これが元の関数 $f(x) = e^x$ と一致するのについては,
剰余項を見ないといけない.

剰余項は $R_n = \frac{e^c}{n!} x^n$ である.

剰余項が十分小さいということを示すのに、次の事実を使う。

$$M > 0 \text{ のとき, } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{M^n}{n!} = 0.$$

$M < N_0$ となる整数 N_0 を考える. $n > N_0$ のとき

$$\begin{aligned} 0 < \frac{M^n}{n!} &= \frac{M}{n} \times \frac{M}{n-1} \times \cdots \times \frac{M}{N_0+1} \times \frac{M}{N_0} \times \frac{M^{N_0-1}}{(N_0-1)!} \\ &< \frac{M}{N_0} \times \frac{M}{N_0} \times \cdots \times \frac{M}{N_0} \times \frac{M}{N_0} \times \frac{M^{N_0-1}}{(N_0-1)!} \\ &= \left(\frac{M}{N_0}\right)^{n-N_0} \frac{M^{N_0-1}}{(N_0-1)!}. \end{aligned}$$

$\frac{M}{N_0} < 1$ だから, $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{M}{N_0}\right)^{n-N_0} \frac{M^{N_0-1}}{(N_0-1)!} = 0$.
はさみうちの原理より 0 に収束することがわかる。

はさみうちの原理 (数列版)

3つの数列 $\{a_n\}_n, \{b_n\}_n, \{c_n\}_n$ に対して $a_n \leq c_n \leq b_n$ であるとする.

もし, a_n と b_n が同じ α に収束するならば, c_n もこの α に収束する.

剰余項 $R_n = \frac{e^c}{n!} x^n$ について.

$x > 0$ のとき, $0 < c < x$ だから $e^c < e^x$. $0 \leq R_n \leq \frac{e^x}{n!} x^n$ で,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 0 = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^x}{n!} x^n = 0.$$

はさみうちの原理より, $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = 0$.

$x < 0$ のとき, $x < c < 0$ だから $e^c < e^0 = 1$. $-\frac{1}{n!}|x|^n \leq R_n \leq \frac{1}{n!}|x|^n$ で,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} -\frac{1}{n!}|x|^n = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n!}|x|^n = 0.$$

はさみうちの原理より, $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = 0$.

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + \cdots.$$

※ e^x のことを $\exp x$ と書くことがある.

例 10.2. $f(x) = \sin x$.

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} \sin x & n = 4k, \\ \cos x & n = 4k + 1, \\ -\sin x & n = 4k + 2, \\ -\cos x & n = 4k + 3 \end{cases}, \quad f^{(n)}(0) = \begin{cases} 0 & n = 4k, \\ 1 & n = 4k + 1, \\ 0 & n = 4k + 2, \\ -1 & n = 4k + 3. \end{cases}$$

$f^{(2n)}(0) = 0$, $f^{(2n+1)}(0) = (-1)^n$ と表せることに注意する。
したがって、マクローリン展開は

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} \\ &= x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} + \cdots \end{aligned}$$

剰余項は $R_n = \frac{f^{(n)}(c)}{n!} x^n = \frac{1}{n!} x^n \sin\left(c + \frac{n\pi}{2}\right)$ である.

$-1 \leq \sin \theta \leq 1$ より $-\frac{1}{n!}|x|^n \leq R_n \leq \frac{1}{n!}|x|^n$ であり,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} -\frac{1}{n!}|x|^n = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n!}|x|^n = 0.$$

はさみうちの原理より, $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = 0$.

$$\begin{aligned} \sin x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} \\ &= x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} + \cdots \end{aligned}$$

例 10.3. $f(x) = \cos x$.

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} \cos x & n = 4k, \\ -\sin x & n = 4k + 1, \\ -\cos x & n = 4k + 2, \\ \sin x & n = 4k + 3 \end{cases}, \quad f^{(n)}(0) = \begin{cases} 1 & n = 4k, \\ 0 & n = 4k + 1, \\ -1 & n = 4k + 2, \\ 0 & n = 4k + 3. \end{cases}$$

$f^{(2n)}(0) = (-1)^n$, $f^{(2n+1)}(0) = 0$ と表せることに注意する。
したがって、マクローリン展開は

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} \\ &= 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} + \cdots \end{aligned}$$

剰余項は $R_n = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}x^n = \frac{1}{n!}x^n \cos\left(c + \frac{n\pi}{2}\right)$ である.

$-1 \leq \cos \theta \leq 1$ より $-\frac{1}{n!}|x|^n \leq R_n \leq \frac{1}{n!}|x|^n$ であり,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} -\frac{1}{n!}|x|^n = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n!}|x|^n = 0.$$

はさみうちの原理より, $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = 0$.

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} + \cdots.$$

オイラーの等式

マクローリン展開することの一番の重要な点は, x に代入するものを一般的な数にしてもよいということである.

正当化はさておき e^x のマクローリン展開の式に x に $y i$ ($i = \sqrt{-1}$ は虚数単位) を代入してしまおう.

$$\begin{aligned} e^{yi} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (y i)^n \\ &= 1 + y i + \frac{1}{2}(-y^2) + \frac{1}{6}(-i y^3) + \frac{1}{4!} y^4 + \frac{1}{5!} y^5 i \\ &\quad + \frac{1}{6!}(-y^6) + \frac{1}{7!}(-i y^7) + \cdots \end{aligned}$$

次に注意しよう: $i^n = \begin{cases} 1 & n = 4k, \\ i & n = 4k + 1, \\ -1 & n = 4k + 2, \\ -i & n = 4k + 3 \end{cases} = \begin{cases} (-1)^\ell & n = 2\ell, \\ (-1)^\ell i & n = 2\ell + 1. \end{cases}$

先ほどのマクローリン展開を i がついていない項と i がついている項とで振り分ければ

$$\begin{aligned} e^{yi} = & \left[1 - \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{4!}y^4 - \frac{1}{6!}y^6 + \cdots + \frac{(-1)^\ell}{(2\ell)!}y^{2\ell} + \cdots \right] \\ & + i \left[y - \frac{1}{6}y^3 + \frac{1}{5!}y^5 - \frac{1}{7!}y^7 + \cdots + \frac{(-1)^\ell}{(2\ell+1)!}y^{2\ell+1} + \cdots \right] \end{aligned}$$

それぞれが $\cos y$, $\sin y$ のマクローリン展開に一致しているので、次の等式が得られた。

オイラーの等式 (オイラーの公式)

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta.$$

この公式は便利なので、使える機会があったらどんどん使ってほしい。

例 10.4. $f(x) = \log(1+x)$

$f'(x) = \frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1}$, $f''(x) = -(1+x)^{-2}$, $f'''(x) = 2(1+x)^{-3}$
であり, 一般的に

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1} (n-1)! (1+x)^{-n} \quad (n = 1, 2, \dots).$$

$f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, $f''(0) = -1$, $f'''(0) = 2$, $f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1} (n-1)!$
($n = 1, 2, \dots$) である. したがって, マクローリン展開は

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} (n-1)!}{n!} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n \\ &= x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n + \cdots \end{aligned}$$

剰余項を小さくするという作業は大変であり、
実は $-1 < x < 1$ でなければいけない。

GIF 動画もあわせてみてください。

剰余項は一般に次のような表し方もある。

- ラグランジュの剰余項 (従来): $R_n = \frac{f^{(n)}(c)}{n!} (x - a)^n.$
- ベルヌーイの剰余項 (積分形): $R_n = \int_a^x \frac{f^{(n)}(t)}{(n-1)!} (x-t)^{n-1} dt.$
- コーシーの剰余項: $R_n = \frac{f^{(n)}(c)}{(n-1)!} (x-a)(x-c)^{n-1}.$

$f(x) = \log(1+x)$ については、積分形の剰余項を用いないと、
剰余項が小さいことを示すのが難しい。

応用上は無限級数ではなく、有限個の項で止めることが多い.

… 無限に足すのは現実的ではない.

n 次までのマクローリン展開 [マクローリン級数を n 次の項まで]
を求めるには,

- ① n 回微分する
- ② 0 のときの値を求める
- ③ $k!$ で割る (k は微分した回数)
- ④ これで出てきた数が x^k の係数である.
- ⑤ それらを組み合わせて多項式にする.

例 10.5. $f(x) = \sqrt{1+x}$ の3次までのマクローリン展開

$$f(x) = (1+x)^{\frac{1}{2}} \qquad f(0) = 1 \qquad c_0 = \frac{1}{0!} \times 1 = 1$$

$$f'(x) = \frac{1}{2}(1+x)^{-\frac{1}{2}} \qquad f'(0) = \frac{1}{2} \qquad c_1 = \frac{1}{1!} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{1}{2} \times -\frac{1}{2}(1+x)^{-\frac{3}{2}} \\ &= -\frac{1}{4}(1+x)^{-\frac{3}{2}} \end{aligned} \qquad f''(0) = -\frac{1}{4} \qquad c_2 = \frac{1}{2!} \times -\frac{1}{4} = -\frac{1}{8}$$

$$\begin{aligned} f'''(x) &= -\frac{1}{4} \times -\frac{3}{2}(1+x)^{-\frac{5}{2}} \\ &= \frac{3}{8}(1+x)^{-\frac{5}{2}} \end{aligned} \qquad f'''(0) = \frac{3}{8} \qquad c_3 = \frac{1}{3!} \times \frac{3}{8} = \frac{1}{16}$$

以上から, 3 次までのマクローリン展開は

$$\begin{aligned} & f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f'''(0)}{6}x^3 \\ &= c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3. \end{aligned}$$

例 10.6. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}}$ の3次までのマクローリン展開

$$f(x) = (1-x)^{-\frac{1}{2}}$$

$$f(0) = 1 \quad c_0 = \frac{1}{0!} \times 1 = 1$$

$$f'(x) = -\frac{1}{2}(1-x)^{-\frac{3}{2}}(-1)$$

$$= \frac{1}{2}(1-x)^{-\frac{3}{2}}$$

$$f'(0) = \frac{1}{2} \quad c_1 = \frac{1}{1!} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$f''(x) = \frac{1}{2} \times -\frac{3}{2}(1-x)^{-\frac{5}{2}}(-1)$$

$$= \frac{3}{4}(1-x)^{-\frac{5}{2}}$$

$$f''(0) = \frac{3}{4} \quad c_2 = \frac{1}{2!} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{8}$$

$$f'''(x) = \frac{3}{4} \times -\frac{5}{2}(1-x)^{-\frac{7}{2}}(-1)$$

$$= \frac{15}{8}(1-x)^{-\frac{7}{2}}$$

$$f'''(0) = \frac{15}{8} \quad c_3 = \frac{1}{3!} \times \frac{15}{8} = \frac{5}{16}$$

以上から, 3 次までのマクローリン展開は

$$\begin{aligned} & f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f'''(0)}{6}x^3 \\ &= c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + \frac{5}{16}x^3. \end{aligned}$$

おまけ: マクローリン級数とべき級数

$f(x)$ のマクローリン展開が次の通りに与えられたとしよう

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_n x^n + \cdots .$$

このとき, $f'(x)$ および $\int_0^x f(t) dt$ のマクローリン展開はそれぞれ

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) c_{n+1} x^n \\ &= c_1 + 2c_2 x + 3c_3 x^2 + \cdots + n c_n x^{n-1} + (n+1) c_{n+1} x^n + \cdots . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^x f(t) dt &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1} x^{n+1} \\ &= c_0 x + \frac{c_1}{2} x^2 + \frac{c_2}{3} x^3 + \cdots + \frac{c_{n-1}}{n} x^n + \frac{c_n}{n+1} x^{n+1} + \cdots . \end{aligned}$$

また, $f(x)$ および $g(x)$ のマクローリン展開が

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots,$$

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_n x^n + \cdots$$

とき, $f(x)g(x)$ のマクローリン展開は

$$\begin{aligned} f(x)g(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{r=0}^n a_{n-r} b_r \right) x^n \\ &= a_0 b_0 + (a_1 b_0 + a_0 b_1) x + (a_2 b_0 + a_1 b_1 + a_0 b_2) x^2 + \cdots \\ &\quad + (a_n b_0 + a_{n-1} b_1 + \cdots + a_{n-r} b_r + \cdots + a_0 b_n) x^n + \cdots. \end{aligned}$$

無限級数なので, 本来は項の足す順番を換えたり, 微分積分をしてしまうのは危険な作業なのだが, 気にせず, 有限次の多項式と同じようにやってよいことが知られている.

逆に, マクローリン展開が

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_n x^n + \cdots$$

となるような関数 $f(x)$ を考えることができる.
ただし, 無限項の和なので収束するのかわからない.

そこで, 次のような方法で収束する x の範囲を調べることができる.

ダランベールの方法

$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right|$ が収束するとする.

このとき, $|x| < \frac{1}{L}$ であれば収束する (関数として意味を持つ).

コーシーの方法

$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|}$ が収束するとする.

このとき, $|x| < \frac{1}{L}$ であれば収束する (関数として意味を持つ).

ただし, $\frac{1}{0} = \infty$ と解釈し, このときはすべての x で収束するといえる.

この $\frac{1}{L}$ で計算できる数を**収束半径**という.

例 10.7. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2} x^n$ の収束半径

ダランベールの方法を用いて計算する. $c_n = \frac{(2n)!}{(n!)^2}$ なので,

$$\begin{aligned}\frac{c_{n+1}}{c_n} &= \frac{(2(n+1))!}{((n+1)!)^2} \times \frac{(n!)^2}{(2n)!} \\ &= \frac{(2n+2)(2n+1)(2n)(2n-1)\cdots 3\cdot 2\cdot 1}{(n+1)n(n-1)\cdots 2\cdot 1 \cdot (n+1)n(n-1)\cdots 2\cdot 1} \\ &\quad \times \frac{n(n-1)\cdots 2\cdot 1 \cdot n(n-1)\cdots 2\cdot 1}{(2n)(2n-1)\cdots 3\cdot 2\cdot 1} \\ &= \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)(n+1)} = \frac{2(2+\frac{1}{n})}{1+\frac{1}{n}}.\end{aligned}$$

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2(2 + \frac{1}{n})}{1 + \frac{1}{n}} = \frac{2 \times 2}{1} = 4.$$

したがって, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2} x^n$ の収束半径は $\frac{1}{L} = \frac{1}{4}$ である.