

微分積分 1(微分) 自習スライド (Part 11)

不定形の極限值・ロピタルの定理

鈴木 敏行

神奈川大学

2023 年 03 月 01 日

※ 転載や再配布を禁止する.

<http://t21suzuki.html.xdomain.jp/>

不定形の極限值

今回は、極限値の計算を微分法を用いて工夫して行う方法を紹介する。
ところで、極限値の性質として、

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A, \lim_{x \rightarrow a} g(x) = B \neq 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}.$$

例 11.1. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 6x + 5}{x^2 - 2x - 3}$

分子分母ともに多項式だから

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x^3 - 6x + 5) = 1 - 6 + 5 = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - 2x - 3) = 1 - 2 - 3 = -4 \neq 0.$$

したがって、

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 6x + 5}{x^2 - 2x - 3} = \frac{\lim_{x \rightarrow 1} (x^3 - 6x + 5)}{\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - 2x - 3)} = \frac{0}{-4} = 0.$$

分母の極限值が0になった場合は、収束しないことがある。

例 11.2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}$

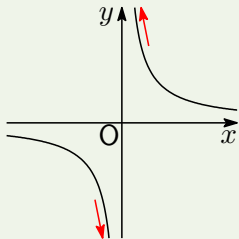
分子: $\lim_{x \rightarrow 0} 1 = 1$, 分母: $\lim_{x \rightarrow 0} x = 0$ に注意する.

グラフで示す通り,

$$\lim_{x \rightarrow +0} \frac{1}{x} = +\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow -0} \frac{1}{x} = -\infty.$$

右極限と左極限が一致しないので、
収束しない (発散・振動).



例 11.3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2}$

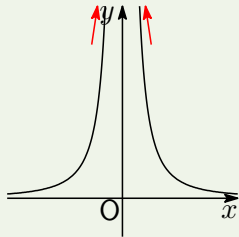
分子: $\lim_{x \rightarrow 0} 1 = 1$, 分母: $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$ に注意する.

グラフで示す通り,

$$\lim_{x \rightarrow +0} \frac{1}{x^2} = +\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow -0} \frac{1}{x^2} = +\infty.$$

右極限と左極限が同じ $+\infty$ となる.
収束せず発散していることになるが,
正の無限大に発散していることが言える.



一方, 分母だけでなく, 分子の極限值も 0 だった場合はどうなるだろうか.

例 11.4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{cx}{x}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} cx = c \times 0 = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0} x = 0. \quad \text{しかし, } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{cx}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} c = c.$$

例 11.5. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x^3}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0} x^3 = 0. \quad \text{しかし, } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty.$$

例 11.6. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4}{3x}$

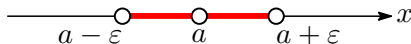
$$\lim_{x \rightarrow 0} x^4 = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0} 3x = 0. \quad \text{しかし, } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4}{3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{3}x^3 = 0.$$

このように、分母分子の極限值からでは、分数式になった関数の極限值が求められない状況を不定形という。

ロピタルの定理

不定形となった場合、そのままでは極限值がどうなるのか定まらない。
その場合に極限値の計算を少しでも楽する方法を考えた定理が
次のロピタルの定理である。

今日の授業では、 $x = a$ の近く とは $x = a$ を含んでいないものとする。



ロピタルの定理 (L'Hospital)

$x = a$ の近くで微分可能な 2 つの関数 $f(x)$, $g(x)$ に次の 4 条件を課す.

- (1) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$.
- (2) $g(x)$ が $x = a$ の近くで 0 でない.
- (3) $f'(x)$ と $g'(x)$ とが同時に 0 にならない.
- (4) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$ が確定する ($L = \pm\infty$ も含む).

このとき, $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = L$.

定理の主張では, 通常 of 極限值を考えているが, 片側極限であっても成立する. 実際, 証明は片側極限の場合を考える.

準備: コーシーの平均値定理

$f(x)$ および $g(x)$ は $a \leq x \leq b$ で連続, $a < x < b$ で微分可能とする.
 $g(a) \neq g(b)$ であり, $f'(x)$ と $g'(x)$ が同時に 0 になることがないとする.
このとき, 次を満たす c が存在する.

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}, \quad a < c < b.$$

証明

$f(a) = 0, g(a) = 0$ と定めれば, $f(x), g(x)$ とともに $a \leq x \leq a + \varepsilon$ で連続,
 $a < x < a + \varepsilon$ で微分可能である [条件 (1)].

ここで, コーシーの平均値定理から

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)}, \quad a < c_x < x (\leq a + \varepsilon)$$

となる c_x が存在する [条件 (2)(3)].

ここで, 仮定 [条件 (4)] から

$$\lim_{c \rightarrow a+0} \frac{f'(c)}{g'(c)} = L.$$

$x \rightarrow a+0$ のとき, もちろん $c_x \rightarrow a+0$ だから

$$\lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)} = L.$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)} = L \quad (\text{証明終了}).$$

条件 (2)(3) については, 特に

$g'(x)$ が $x = a$ の近くで 0 でない.

と解釈してもよいだろう.

実際, 条件 (3) は自動的に成立するのはいいが, ラグランジュの平均値定理から

$$g(x) - g(a) = g'(c_x) \neq 0. \quad \therefore g(x) \neq g(a) = 0.$$

これより, 条件 (2) が成立する.

使いやすい形のロピタルの定理

$x = a$ の近くで微分可能な 2 つの関数 $f(x)$, $g(x)$ に次の 3 条件を課す.

(1) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0.$

(2) $g'(x)$ が $x = a$ の近くで 0 でない.

(3) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$ が確定する ($L = \pm\infty$ も含む).

このとき, $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$

例 11.7. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x^2 + 2}{x^2 - 1}$

分子 : $\lim_{x \rightarrow 1} (x^3 - 3x^2 + 2) = 1 - 3 + 2 = 0$, 分母 : $\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - 1) = 1 - 1 = 0$.

次に,

分子 : $(x^3 - 3x^2 + 2)' = 3x^2 - 6x$, 分母 : $(x^2 - 1)' = 2x$

であり, 分母の導関数は $x = 1$ の近くでは 0 でない. また,

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - 6x}{2x} = \frac{\lim_{x \rightarrow 1} (3x^2 - 6x)}{\lim_{x \rightarrow 1} (2x)} = \frac{3 - 6}{2} = -\frac{3}{2}.$$

以上から, ロピタルの定理により, $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x^2 + 2}{x^2 - 1} = -\frac{3}{2}$.

以上の例を略記すれば,

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x^2 + 2}{x^2 - 1} \quad \begin{array}{l} \nearrow 1 - 3 + 2 = 0 \\ \searrow 1 - 1 = 0 \end{array} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^3 - 3x^2 + 2)'}{(x^2 - 1)'} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - 6x}{2x} \quad \begin{array}{l} \nearrow 3 - 6 = -3 \\ \searrow 2 \neq 0 \end{array} \\ &= \frac{-3}{2} = -\frac{3}{2}. \end{aligned}$$

条件チェックは欠かさないように.

ときどき、次のような間違い方をする人がいる.

例 11.8. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 6x^2 + 5}{x^2 - x - 2}$ (間違った解法)

ロピタルの定理より,

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 6x^2 + 5}{x^2 - x - 2} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^3 - 6x^2 + 5)'}{(x^2 - x - 2)'} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - 12x}{2x - 1} = \frac{3 - 12}{2 - 1} = -9.\end{aligned}$$

不定形になっているかの確認を忘れないで!!!

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 6x^2 + 5}{x^2 - x - 2} &\begin{array}{l} \nearrow 1 - 6 + 5 = 0 \\ \searrow 1 - 1 - 2 = -2 \end{array} \\ &= \frac{0}{-2} = 0.\end{aligned} \quad \Leftarrow \text{不定形ではない (分母見て)!}$$

ちなみに、条件が揃っていれば、何度もロピタルの定理が使える。

例 11.9. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1 - 2x - 2x^2}{x - \sin x}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1 - 2x - 2x^2}{x - \sin x} \begin{matrix} \nearrow 0 \\ \searrow 0 \end{matrix} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^{2x} - 1 - 2x - 2x^2)'}{(x - \sin x)'}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2e^{2x} - 2 - 4x}{1 - \cos x} \begin{matrix} \nearrow 0 \\ \searrow 0 \end{matrix} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(2e^{2x} - 2 - 4x)'}{(1 - \cos x)'}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4e^{2x} - 4}{\sin x} \begin{matrix} \nearrow 0 \\ \searrow 0 \end{matrix} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(4e^{2x} - 4)'}{(\sin x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{8e^{2x}}{\cos x} \begin{matrix} \nearrow 8 \\ \searrow 1 \end{matrix} = \frac{8}{1} = 8.$$

※ $e^0 = 1$, $\sin 0 = 0$, $\cos 0 = 1$ に注意.

おまけ 1: 変形されたロピタルの定理

a が $\pm\infty$ の場合もある.

$x > c$ で微分可能な 2 つの関数 $f(x)$, $g(x)$ に次の 3 条件を課す.
 c は適当な数でよい.

$$(1) \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0.$$

(2) $g'(x)$ が $x > c$ で 0 でない.

$$(3) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \text{ が確定する } (L = \pm\infty \text{ も含む}).$$

$$\text{このとき, } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

上の極限で $x \rightarrow +\infty$ を $x \rightarrow -\infty$ としたバージョンにするなら,
微分可能性などの条件を $x > c$ ではなく $x < c$ としておく必要がある.

元々の分子分母の極限值が $\pm\infty$ である場合もある.

$x = a$ の近くで微分可能な 2 つの関数 $f(x)$, $g(x)$ に次の 3 条件を課す.

(1) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty$, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \pm\infty$ (複号はどう選んでも構わない).

(2) $g'(x)$ が $x = a$ の近くで 0 でない.

(3) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$ が確定する ($L = \pm\infty$ も含む).

このとき, $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = L$.

もちろん, 片側極限の場合でも成立する.

証明は面倒なので省略する.

a も極限值も無限大の場合でも差し支えない.

$x > c$ で微分可能な 2 つの関数 $f(x)$, $g(x)$ に次の 3 条件を課す.
 c は適当な数でよい.

(1) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty$, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \pm\infty$ (複号はどう選んでも構わない).

(2) $g'(x)$ が $x > c$ で 0 でない.

(3) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$ が確定する ($L = \pm\infty$ も含む).

このとき, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L$.

例 11.10. $\lim_{x \rightarrow +0} x^2 \log x$

まず, $\lim_{x \rightarrow +0} x^2 \log x = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\log x}{x^{-2}}$ だから

分子: $\lim_{x \rightarrow +0} \log x = -\infty$, 分母: $\lim_{x \rightarrow +0} x^{-2} = +\infty$. $\Leftarrow$ 不定形!

次に,

$$\lim_{x \rightarrow +0} \frac{(\log x)'}{(x^{-2})'} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\frac{1}{x}}{-2x^{-3}} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\frac{1}{x} \times x^3}{-2x^{-3} \times x^3} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{x^2}{-2} = \frac{0}{-2} = 0.$$

したがって, ロピタルの定理から, 元の極限值も 0 となることがわかる.

$$\lim_{x \rightarrow +0} x^2 \log x = 0$$

一般に, $\lim_{x \rightarrow +0} x^a \log x = 0$ ($a > 0$) が成立する.

例 11.11. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 e^{-2x}$

まず, $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 e^{-2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^{2x}}$ だから

分子: $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$, 分母: $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{2x} = +\infty$. $\Leftarrow$ 不定形!

次に, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x^2)'}{(e^{2x})'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{2e^{2x}}$ であって,

分子: $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x = +\infty$, 分母: $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2e^{2x} = +\infty$. $\Leftarrow$ 不定形!

さらに, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(2x)'}{(2e^{2x})'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{4e^{2x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} e^{-2x} = 0$.

したがって, ロピタルの定理から,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{2e^{2x}} = 0. \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^{2x}} = 0.$$

ゆえに, $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 e^{-2x} = 0$

以上の計算は, 次のように略記してもよい.

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 e^{-2x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^{2x}} \quad \begin{array}{l} \nearrow +\infty \\ \searrow +\infty \end{array} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x^2)'}{(e^{2x})'} \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{2e^{2x}} \quad \begin{array}{l} \nearrow +\infty \\ \searrow +\infty \end{array} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(2x)'}{(2e^{2x})'} \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{4e^{2x}} \quad \begin{array}{l} \nearrow 2 \\ \searrow +\infty \end{array} = \frac{2}{\infty} = 0. \quad \text{※ } \frac{1}{\infty} = 0 \text{ と解釈する.}
 \end{aligned}$$

一般に, $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^a e^{-bx} = 0$ ($a > 0, b > 0$) が成立する.

おまけ 2: ロピタルの定理をあまり使わない方がいい場合

ロピタルの定理を使ってしまうと計算ができなくなる場合もある。

例 11.12. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2^{x+1} + 3^{x+1}}{2^x + 3^x}$

ロピタルの定理を 1 度使おうとすると,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2^{x+1} + 3^{x+1}}{2^x + 3^x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(2^{x+1} + 3^{x+1})'}{(2^x + 3^x)'} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2^{x+1} \log 2 + 3^{x+1} \log 3}{2^x \log 2 + 3^x \log 3} \end{aligned}$$

Diagrammatic annotations: Red arrows point from the original expression to the derivative expression. Yellow boxes with $+\infty$ are placed next to the numerator and denominator of the derivative expression, indicating the $\frac{\infty}{\infty}$ form.

これを繰り返すと $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2^{x+1}(\log 2)^n + 3^{x+1}(\log 3)^n}{2^x(\log 2)^n + 3^x(\log 3)^n}$ となる.

このままでは計算が進む見込みがない。このような場合、底が一番大きい指数関数で分母分子を割る。

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2^{x+1} + 3^{x+1}}{2^x + 3^x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(2^{x+1} + 3^{x+1}) \div 3^x}{(2^x + 3^x) \div 3^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2\left(\frac{2}{3}\right)^x + 3}{\left(\frac{2}{3}\right)^x + 1} \\ &= \frac{2 \times 0 + 3}{0 + 1} = 2.\end{aligned}$$

指数法則 $\frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x$, および $0 < a < 1$ のとき $\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = 0$ に注意する。

$x \rightarrow -\infty$ のときは逆になるので注意すること。