微分積分 1(微分) 自習スライド (Part 13)

関数の凹凸

鈴木 敏行

神奈川大学

2023 年 03 月 01 日

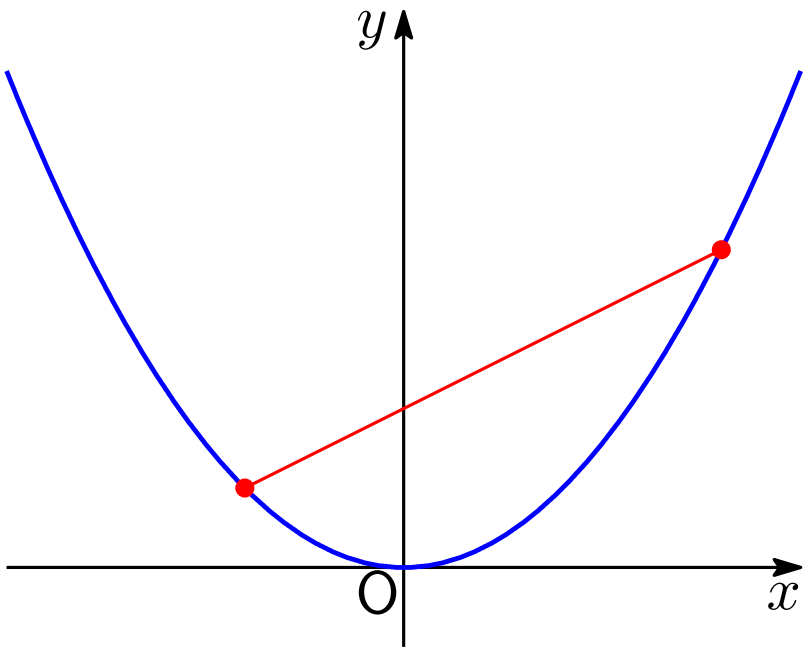
※ 転載や再配布を禁止する.

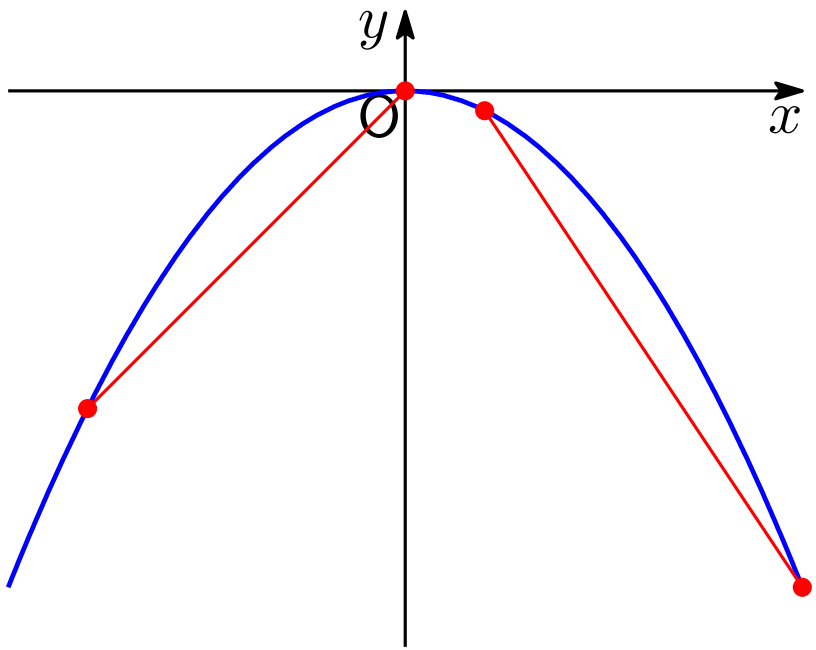
http://t21suzuki.html.xdomain.jp/

ところで, 我々は 膨らんでいる や 凹んでいる というのは
どのようにして認識しているのだろう.

$y = a\,x^2$ のグラフは

- $a > 0$ のとき 下に凸 (y 軸の下向きに膨らんでいる)
- $a < 0$ のとき 上に凸 (y 軸の上向きに膨らんでいる)





これらは基準となる 2 つの点を結んだ線 に対して, その側に 曲線 がある
ということから, その側に膨らんでいるとみなしているのである.

これに注意して, 次の定義をする.

$f(x)$ は $a \leqq x \leqq b$ で定義された関数とする.

(1) $a \leqq x_0 \leqq x_1 \leqq b$, $0 \leqq t \leqq 1$ に対して

$$f\big(t\,x_1 + (1-t)\,x_0\big) \leqq t\,f(x_1) + (1-t)\,f(x_0)$$

となる関数を凸関数という. 下に凸な関数ともいう.

(2) $a \leqq x_0 \leqq x_1 \leqq b$, $0 \leqq t \leqq 1$ に対して

$$f\big(t\,x_1 + (1-t)\,x_0\big) \geqq t\,f(x_1) + (1-t)\,f(x_0)$$

となる関数を凹関数という. 上に凸な関数ともいう.

t をパラメーターとしてみると, 左辺は関数のグラフ (曲線), 右辺は 2 点を結ぶ線分 (直線) を表しており, 不等号で位置の上下関係を表している.

注意

$a \leqq x_0 \leqq x_1 \leqq b,\ 0 \leqq t \leqq 1$ に対して

$$f\bigl(t\,x_1 + (1-t)\,x_0\bigr) = t\,f(x_1) + (1-t)\,f(x_0)$$

を満たす関数は $f(x) = A\,x + B$ だけである.

証明

$a \leqq x \leqq b$ とする. $t\,b + (1-t)\,a = x$ とすると, $t = \dfrac{x-a}{b-a}$.

$$\begin{aligned} f(x) &= t\,f(b) + (1-t)\,f(a) = \frac{x-a}{b-a}\,f(b) + \frac{b-x}{b-a}\,f(a) \\ &= \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\,x + \frac{b\,f(a) - a\,f(b)}{b-a}. \end{aligned}$$

これは $f(x) = A\,x + B$ で書けることを意味する.

ちなみに, $a \leqq x_0 < x_1 \leqq b$, $0 < t < 1$ に対して

$$f\big(t\,x_1 + (1-t)\,x_0\big) < t\,f(x_1) + (1-t)\,f(x_0)$$

となる関数を 狭義凸関数 という. 狭義に下に凸な関数ともいう.

狭義凸関数の場合, $a \leqq x_0 \leqq x_1 \leqq b$, $0 \leqq t \leqq 1$ の範囲で

$$f\big(t\,x_1 + (1-t)\,x_0\big) \leqq t\,f(x_1) + (1-t)\,f(x_0)$$

である場合, 等号成立条件が $x_0 = x_1$ もしくは $t = 0,\ 1$ となる点に注意.

等号成立条件を気にするのであれば, 狭義凸関数が必要であろう.

例 13.1. $f(x) = x^2$ の場合,

定義から凸関数であることを示そう.

$$
\begin{aligned}
& f\bigl(t\,x_1 + (1-t)\,x_0\bigr) = \bigl(t\,x_1 + (1-t)\,x_0\bigr)^2 \\
&= t^2\,x_1^2 + (1-t)^2\,x_0^2 + 2\,t\,(1-t)\,x_0\,x_1 \\
&= t\,x_1^2 + (1-t)\,x_0^2 \\
&+ 2\,t\,(1-t)\,x_0\,x_1 + (t^2-t)\,x_0^2 + \bigl[(1-t)^2 - (1-t)\bigr]\,x_1^2 \\
&= t\,x_1^2 + (1-t)\,x_0^2 + 2\,t\,(1-t)\,x_0\,x_1 + t\,(t-1)\,x_0^2 + t\,(t-1)\,x_1^2 \\
&= t\,x_1^2 + (1-t)\,x_0^2 - t\,(1-t)\,[x_0^2 - 2\,x_0\,x_1 + x_1^2] \\
&= t\,x_1^2 + (1-t)\,x_0^2 - t\,(1-t)\,(x_1 - x_0)^2 \\
&\leqq t\,x_1^2 + (1-t)\,x_0^2 = t\,f(x_1) + (1-t)\,f(x_0)
\end{aligned}
$$

等号成立条件は $t = 0,\ t = 1,\ x_1 = x_0$ である.

さすがに下に凸というのを定義通りに示すのは大変なので, 微分を用いて示す方法を考えたい.

凸関数の判定条件

$f(x)$ は $a \leqq x \leqq b$ で微分可能とする. このとき, 次の 2 つは同値である.
(1) $f(x)$ が凸関数である.
(2) $f'(x)$ が (広義) 単調増加.
(3) 曲線 $y = f(x)$ の接線は必ず曲線の下にある. つまり,

$$f(c) + f'(c)(x - c) \leqq f(x), \quad c,\, x \in [a, b].$$

(3) も見た目で凸性を判断するのに有効だが,

(1) ⇒ (2)

$x_0 < x < x_1$ とする. このとき, $x = t\,x_1 + (1-t)\,x_0$, つまり, $t = \dfrac{x - x_0}{x_1 - x_0}$ とすれば, 凸であることの定義から

$$f(x) \leqq t\,f(x_1) + (1-t)\,f(x_0).$$

したがって,

$$\begin{aligned}
\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} &\leqq \frac{t\,f(x_1) + (1-t)\,f(x_0) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{t\,[f(x_1) - f(x_0)]}{x - x_0} \\
&= \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \times \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}. \\
\frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x} &\geqq \frac{f(x_1) - t\,f(x_1) - (1-t)\,f(x_0)}{x_1 - x} = \frac{(1-t)\,[f(x_1) - f(x_0)]}{x_1 - x} \\
&= \frac{x_1 - x}{x_1 - x_0} \times \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}.
\end{aligned}$$

これから, $x_0 < x < x_1$ ならば

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leqq \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \leqq \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x}$$

このとき, $x = x_0$ および $x = x_1$ で微分可能であるから,

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0 + 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leqq \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}.$$

$$f'(x_1) = \lim_{x \to x_1} \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} = \lim_{x \to x_1 - 0} \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x} \geqq \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}.$$

ゆえに, $f'(x_0) \leqq f'(x_1)$ がわかる.

$x_0 < x_1$ ならば $f'(x_0) \leqq f'(x_1)$ なので, これは $f'(x)$ が (広義) 単調増加であることを意味している.

(1) ⇐ (2)

$x_0 = x_1$ であったり $t = 0,\, 1$ であったりする場合には,
凸であるということの定義にある不等号の等号が常に成立する.

そこで $a \leqq x_0 < x_1 \leqq b,\, 0 < t < 1$ とする. 平均値の定理から,
$x_0 < c_0 < t\,x_1 + (1-t)\,x_0,\, t\,x_1 + (1-t)\,x_0 < c_1 < x_1$ となる c_0, c_1 があって,

$$
\begin{aligned}
f\big(t\,x_1 + (1-t)\,x_0\big) - f(x_0) &= f'(c_0)\left[\big(t\,x_1 + (1-t)\,x_0\big) - x_0\right] \\
f(x_1) - f\big(t\,x_1 + (1-t)\,x_0\big) &= f'(c_1)\left[x_1 - \big(t\,x_1 + (1-t)\,x_0\big)\right]
\end{aligned}
$$

整理すれば,

$$
\begin{aligned}
f\big(t\,x_1 + (1-t)\,x_0\big) - f(x_0) &= f'(c_0)\,t\,(x_1 - x_0), \\
f(x_1) - f\big(t\,x_1 + (1-t)\,x_0\big) &= f'(c_1)\,(1-t)\,(x_1 - x_0).
\end{aligned}
$$

$1-t>0$, $t>0$ **だから**,

$$(1-t)\,f\bigl(t\,x_1+(1-t)\,x_0\bigr)-(1-t)\,f(x_0)=f'(c_0)\,(1-t)\,t\,(x_1-x_0),$$
$$t\,f(x_1)-t\,f\bigl(t\,x_1+(1-t)\,x_0\bigr)=f'(c_1)\,t\,(1-t)\,(x_1-x_0).$$

仮定より, $f'(c_0)\leqq f'(c_1)$ **だから**,

$$(1-t)\,f\bigl(t\,x_1+(1-t)\,x_0\bigr)-(1-t)\,f(x_0)\leqq t\,f(x_1)-t\,f\bigl(t\,x_1+(1-t)\,x_0\bigr).$$

移項して整理すれば, 凸であるということの定義にある不等式が得られる.

(1) ⇒ (3)

$x = c$ のときは明らかなので, $x \neq c$ とする.
下に凸であることの定義から, $0 < t < 1$ に対して

$$f((1-t)c + tx) \leqq (1-t)f(c) + t\,f(x).$$
$$f(c + t(x-c)) - f(c) \leqq t\,[f(x) - f(c)].$$
$$\therefore\ \frac{f(c + t(x-c)) - f(c)}{t(x-c)} \leqq \frac{f(x) - f(c)}{x - c}.$$

ここで, $t \to 0$ とすれば $t(x-c) \to 0$ なので,

$$\lim_{t \to +0} \frac{f(c + t(x-c)) - f(c)}{t(x-c)} = \lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} = f'(c).$$

したがって, $f'(c) \leqq \dfrac{f(x) - f(c)}{x - c}$ なので, これを変形すれば

$$f(c) + f'(c)\,(x-c) \leqq f(x).$$

(1) ⇐ (3)

$x_0,\, x_1 \in [a,b]$ とする. 仮定から, $c \in [a,b]$ であれば

$$f(c) + f'(c)\,(x_0 - c) \leqq f(x_0), \quad f(c) + f'(c)\,(x_1 - c) \leqq f(x_1).$$

ここで, $c = (1-t)\,x_0 + t\,x_1$ とすれば,

$$x_0 - c = -t\,(x_1 - x_0), \quad x_1 - c = (1-t)\,(x_1 - x_0).$$

したがって,

$$\begin{aligned}
&f((1-t)\,x_0 + t\,x_1) = f(c) = (1-t)\,f(c) + t\,f(c) \\
&\leqq (1-t)\,[f(x_0) - f'(c)\,(x_0 - c)] + t\,[f(x_1) - f'(c)\,(x_1 - c)] \\
&= (1-t)\,f(x_0) + t\,f(x_1) - f'(c)\,[(1-t)\,(x_0 - c) + t\,(x_1 - c)] \\
&= (1-t)\,f(x_0) + t\,f(x_1)
\end{aligned}$$

これは, $f(x)$ が下に凸であることを意味する.

$f'(x)$ が広義単調増加であれば凸であることがいえるが,
$f'(x)$ が広義単調増加であるというのは $[f'(x)]' \geqq 0$ であればよい.
以上から, $f''(x) \geqq 0$ ならば凸関数である.
$-f(x)$ を考えれば, $f''(x) \leqq 0$ ならば凹関数であることもわかる.

$f''(x)$ の符号がその前後で変化する x そのもの, または 点 $(x, f(x))$ を
変曲点 という.

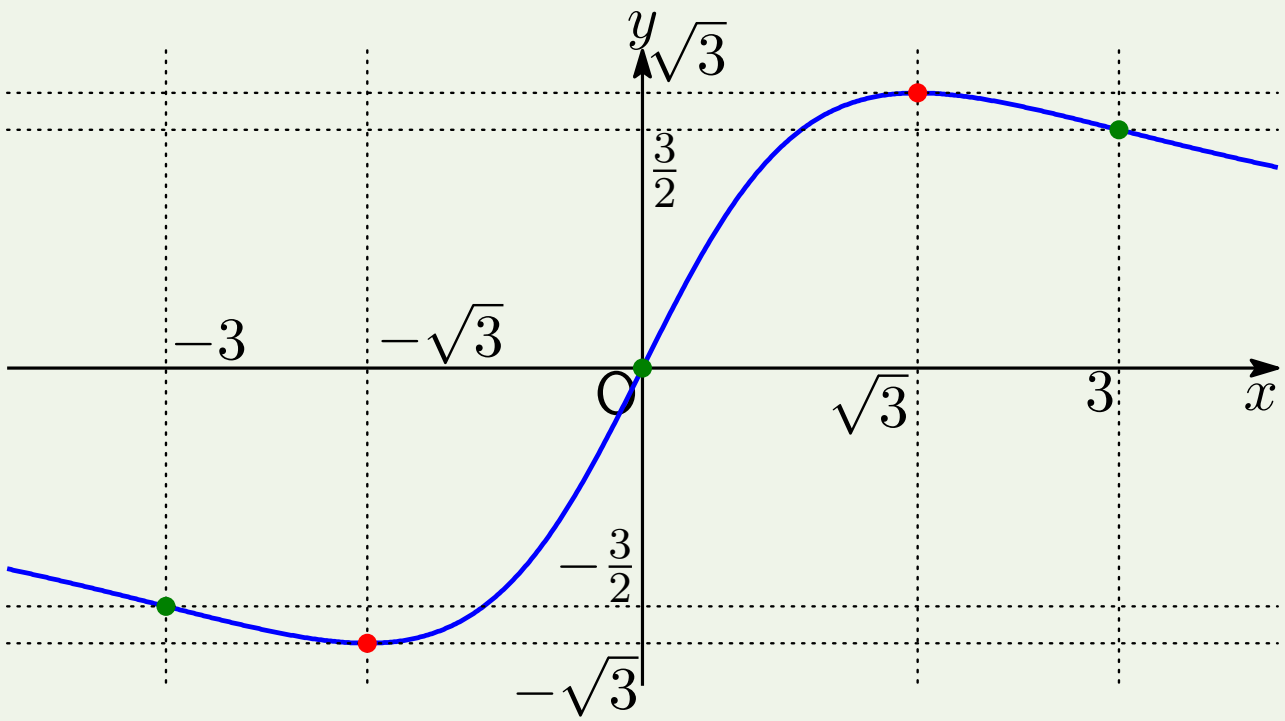
例 13.2. $f(x) = \dfrac{6x}{x^2+3}$ の凹凸.

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{(6x)'(x^2+3) - (6x)(x^2+3)'}{(x^2+3)^2} = \frac{6(x^2+3) - (6x)(2x)}{(x^2+3)^2} \\
&= \frac{6(3-x^2)}{(x^2+3)^2}. \\
f''(x) &= [6(3-x^2)]'\left[(x^2+3)^{-2}\right] + [6(3-x^2)]\left[(x^2+3)^{-2}\right]' \\
&= 6(-2x)\left[(x^2+3)^{-2}\right] + [6(3-x^2)]\left[(-2)(2x)(x^2+3)^{-3}\right] \\
&= 6 \times \frac{-2x(x^2+3) - 4x\,(3-x^2)}{(x^2+3)^3} = 6 \times \frac{-2x(x^2+3+6-2x^2)}{(x^2+3)^3} \\
&= \frac{-12x\,(9-x^2)}{(x^2+3)^3}.
\end{aligned}
$$

したがって, 表にまとめると, 次の通り.

x	$\cdots$	-3	$\cdots$	$-\sqrt{3}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\sqrt{3}$	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$f''(x)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	$-\frac{3}{2}$	↘	$-\sqrt{3}$	↗	0	↗	$\sqrt{3}$	↘	$\frac{3}{2}$	↘
	上に凸	変曲点	下に凸	極小	下に凸	変曲点	上に凸	極大	上に凸	変曲点	下に凸

これを意識してグラフを描くと, 次の通りになる.



例 13.3. ヤングの不等式 (Young)

$p > 1$, $q > 1$ は $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ を満たすとする. このとき, $a > 0$, $b > 0$ に対し

$$a\,b \leqq \frac{1}{p}\,a^p + \frac{1}{q}\,b^q.$$

証明

$f(x) = e^x$ を考える. $f''(x) = e^x > 0$ だから, $f(x)$ は下に凸な関数である. $e^A = a^p$, $e^B = b^q$ となる A, B を考える:

$$A = p\,\log a, \quad B = q\,\log b.$$

下に凸であることの定義で $x_0 = A$, $x_1 = B$, $t = \dfrac{1}{p}$ とすれば, $1 - t = \dfrac{1}{q}$ なので

$$e^{\frac{1}{p}A + \frac{1}{q}B} \leqq \frac{1}{p}\,e^{A} + \frac{1}{q}\,e^{B}.$$

ここで, $\dfrac{1}{p}\,A + \dfrac{1}{q}\,B = \log a + \log b = \log ab$ だから, 整理すると

$$a\,b \leqq \frac{1}{p}\,a^{p} + \frac{1}{q}\,b^{q}.$$

これから特に

$$a\,b \leqq \frac{1}{2}\,a^{2} + \frac{1}{2}\,b^{2}. \quad \therefore\ \sqrt{a\,b} \leqq \frac{a+b}{2}.$$

凸関数であれば, 次に注意する.

イェンセンの不等式 (Jensen)

$f(x)$ は $a \leqq x \leqq b$ で凸とする.
また, $a \leqq x_k \leqq b$ とする $(k = 1,\ 2,\ \cdots,\ n)$.
このとき,

$$f\left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}\right) \leqq \frac{1}{n}\left[f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)\right].$$

$n = 2$ のときは, 凸関数の定義の式で $t = \dfrac{1}{2}$ とすれば,

$$\begin{aligned} f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) &= f\left(\frac{1}{2}\,x_1 + \left(1 - \frac{1}{2}\right)x_2\right) \leqq \frac{1}{2}\,f(x_1) + \left(1 - \frac{1}{2}\right)f(x_2) \\ &= \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}. \end{aligned}$$

$n = k$ のとき成立すると仮定する.

$$f\left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_k}{k}\right) \leqq \frac{1}{k}\left[f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_k)\right].$$

$x_0 = \dfrac{x_1 + x_2 + \cdots + x_k}{k}$ とすると, $a \leqq x_0 \leqq b$ である.

$n = k + 1$ のとき, 凸関数の定義の式で $t = \dfrac{k}{k+1}$ とすれば,

$$\begin{aligned}
&f\left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_k + x_{k+1}}{k+1}\right) \\
&= f\left(\frac{k}{k+1}\,\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_k}{k} + \left(1 - \frac{k}{k+1}\right) x_{k+1}\right) \\
&= f\left(\frac{k}{k+1}\, x_0 + \left(1 - \frac{k}{k+1}\right) x_{k+1}\right) \\
&\leqq \frac{k}{k+1}\, f(x_0) + \left(1 - \frac{k}{k+1}\right) f(x_{k+1}) \quad \text{凸関数の定義} \\
&\leqq \frac{k}{k+1} \times \frac{1}{k}\left[f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_k)\right] + \frac{1}{k+1}\, f(x_{k+1}) \quad \text{仮定を利用} \\
&= \frac{1}{k+1}\left[f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_k) + f(x_{k+1})\right].
\end{aligned}$$

以上の結果はさらに一般化されるが, ここでは紹介にとどめておこう.

本来のイェンセンの不等式 (Jensen)

$f(x)$ は $a \leqq x \leqq b$ で凸とする.
また, $a \leqq x_k \leqq b$, $0 \leqq t_k \leqq 1$ とする $(k = 1,\ 2,\ \cdots,\ n)$,
$t_1 + t_2 + \cdots + t_n = 1$ のとき,

$$f\Big(\sum_{k=1}^{n} t_k\, x_k\Big) = f\big(t_1\, x_1 + t_2\, x_2 + \cdots + t_n\, x_n\big)$$

$$\leqq t_1\, f(x_1) + t_2\, f(x_2) + \cdots + t_n\, f(x_n) = \sum_{k=1}^{n} t_k\, f(x_k).$$

例 13.4. 相加相乗平均の関係式 (AM-GM inequality)

$x_1, x_2, \cdots, x_n$ はすべて正の数とする. このとき,

$$\sqrt[n]{x_1\, x_2\, \cdots\, x_n} \leqq \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}.$$

証明

$f(x) = -\log x$ を考える. $f'(x) = -\dfrac{1}{x}$, $f''(x) = \dfrac{1}{x^2} > 0$.
したがって, $f(x)$ は $x > 0$ で下に凸な関数である.
イェンセンの不等式から

$$-\log \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \leqq \frac{1}{n}\left[-\log x_1 - \log x_2 - \cdots - \log x_n\right]$$

$$= -\frac{1}{n}\,\log(x_1\, x_2\, \cdots\, x_n) = -\log(x_1\, x_2\, \cdots\, x_n)^{\frac{1}{n}}.$$

したがって,

$$\log \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \geqq \log (x_1\, x_2\, \cdots\, x_n)^{\frac{1}{n}}.$$

$e > 1$ だったから,

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \geqq (x_1\, x_2\, \cdots\, x_n)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x_1\, x_2\, \cdots\, x_n}.$$

他にも凸であることを利用して不等式が証明できる例を紹介しよう.