

微分積分 2(積分) 自習スライド (Part 1)

積分の定義

鈴木 敏行

神奈川大学

2023 年 03 月 01 日

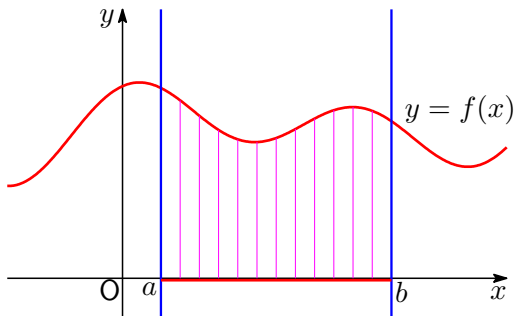
※ 転載や再配布を禁止する.

<http://t21suzuki.html.xdomain.jp/>

積分＝面積

今回から積分を考える.

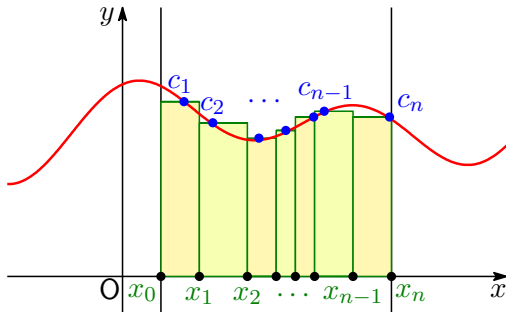
積分というのは, 本来図形の面積を計算するのに考えられた方法である.
(歴史的なことを考えれば, 微分法よりも古い!)



上の図形の面積をどうやって求めよう??

面積の一番の基本: 長方形の面積＝たて × よこ

先ほどの図形を短冊状に細かく切ろう.



$$\Delta : a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b,$$

$$x_{k-1} \leq c_k \leq x_k \quad (k = 1, 2, \cdots, n).$$

- x_k がはさみを入れる場所 (等分でなくてもよい),
- $x_k - x_{k-1}$ が k 番目の短冊の幅,
- $f(c_k)$ が k 番目の短冊の高さ (と見るもの).

この短冊の面積の合計は

$$\begin{aligned} S(\Delta; c) &= f(c_1)(x_1 - x_0) + f(c_2)(x_2 - x_1) + \cdots + f(c_n)(x_n - x_{n-1}) \\ &= \sum_{k=1}^n f(c_k)(x_k - x_{k-1}). \end{aligned}$$

ここで, 短冊の幅をより細かくすれば, 誤差は小さくなると考えられる.
短冊の幅の細かさは

$$|\Delta x| = \max_{1 \leq k \leq n} (x_k - x_{k-1}). \quad \star n \text{ 等分だったら } |\Delta x| = \frac{b-a}{n}.$$

$|\Delta x| \rightarrow 0$ とすれば誤差はほぼ 0 になってくれるだろう.

$|\Delta x| \rightarrow 0$ のときの近づく値を, この図形の面積と定め,

$S_f[a \rightarrow b]$ と表そう.

$$\star S_f[a \rightarrow b] = \int_a^b f(x) dx.$$

$$\lim_{|\Delta x| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(c_k)(x_k - x_{k-1}) = \int_a^b f(x) dx.$$

細長い短冊 (長方形) をどんどん足していったもの, ということで...

- 和 Σ (sum) $\xrightarrow{\text{細長くする}} \int$
- たて: $f(c_k)$ は f の値 $\rightarrow f(x)$
- よこ: $(x_k - x_{k-1})$ は x の差 $\rightarrow dx$
- $k = 1$ から n の和 $\rightarrow x = a$ から b までの面積

このようにして積分の記号が生まれたのであった.

先ほど考えた

$$S(\Delta; c) = \sum_{k=1}^n f(c_k)(x_k - x_{k-1})$$

は, $f(x)$ が負であっても,
 $a > b$ であっても意味を持つ.

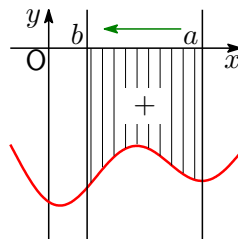
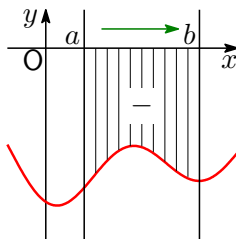
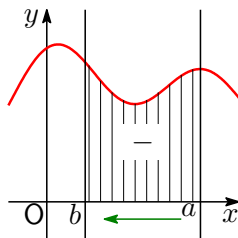
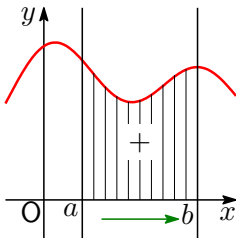
$a > b$ のとき,

$$\Delta : a = x_0 > x_1 > x_2 > \cdots$$

$$\cdots > x_{n-1} > x_n = b,$$

$$x_{k-1} \geq c_k \geq x_k$$

$$(k = 1, 2, \cdots, n).$$



以上までの問題点: 毎回こんな計算 (足し算と極限值) するのは大変!!!

定義からすぐにわかることだが,

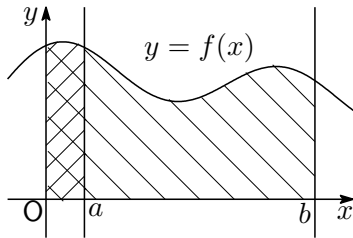
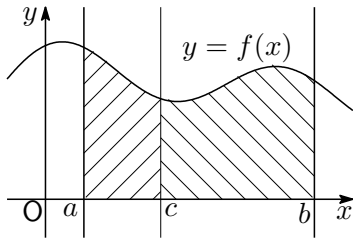
$$S_f[b \rightarrow a] = -S_f[a \rightarrow b].$$

分割しても面積の合計は変わらないのだから

$$S_f[a \rightarrow b] = S_f[a \rightarrow c] + S_f[c \rightarrow b].$$

ここで c はどこでもよいことに注意する. 以上の2つから

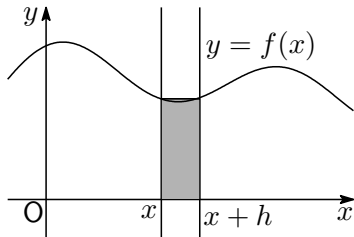
$$S_f[a \rightarrow b] = S_f[c \rightarrow b] - S_f[c \rightarrow a].$$



そこで, $S_f(x) = S_f[c \rightarrow x]$ とおくと, $S_f[a \rightarrow b] = S_f(b) - S_f(a)$.

ここで、短冊状に切った面積の計算の話
を思い出すと

$$\begin{aligned} f(x) h &\doteq S_f[x \rightarrow x+h] \\ &= S_f(x+h) - S_f(x). \end{aligned}$$



$h \rightarrow 0$ であれば誤差はほぼ 0 になる. 上式を h で割って考えれば

$$f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{S_f(x+h) - S_f(x)}{h}.$$

右辺は導関数の定義から $S'_f(x)$ に一致する.

これから $S'_f(x) = f(x)$ が得られた.

$F'(x) = f(x)$ となる関数 $F(x)$ を $f(x)$ の**原始関数**という.

例

$F(x) = \frac{1}{3}x^3$ とすると, $F'(x) = \frac{1}{3} \times 3x^2 = x^2$. $\therefore \frac{1}{3}x^3$ は x^2 の原始関数.

$S_f(x)$ は $f(x)$ の原始関数であり, それが求められれば積分 (面積) の計算ができる. x の関数

$$S_f(x) = S_f[c \rightarrow x] = \int_c^x f(x) dx$$

は c がどこであっても面積の計算に困らないので $\int f(x) dx$ と書く.

$\int_a^b f(x) dx$ を**定積分**というのに対し, $\int f(x) dx$ を**不定積分**という.

本来, 原始関数と不定積分は別物であるが, $f(x)$ が連続であれば同じと考えてよい (**微分積分学の基本定理**).

定積分に関する注意

符号付き面積 $S_f[a \rightarrow b]$ の考えにより, 次の公式に注意しておこう:

$$\begin{aligned}\int_b^a f(x) dx &= - \int_a^b f(x) dx, \\ \int_a^b f(x) dx &= \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.\end{aligned}$$

$F(x)$ が $f(x)$ の原始関数のとき,

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

なのだが, $F(b) - F(a)$ を次のように表す.

$$\left[F(x) \right]_a^b$$

ちなみに定積分において, 下にある a を**下端**, 上にある b を**上端**という.

v - t グラフの面積を考えれば、進んだ道のりが計算できるという話がある。

速さ = 道のり ÷ 時間だから

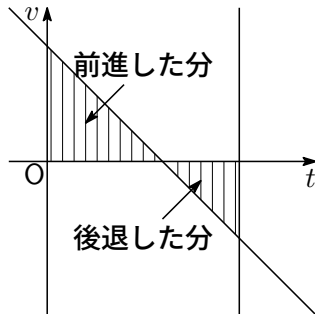
道のり = 速さ × 時間.

速さが刻々と変わる場合,

瞬間の速さ × 微小時間の合計

を考えれば求めたい道のりが計算できる.

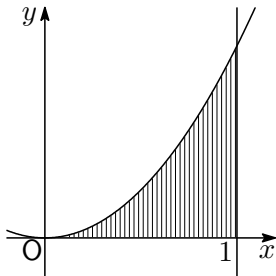
$$\text{進んだ道のり} = \int_{T_{\text{start}}}^{T_{\text{finish}}} v(t) dt.$$



この考え方はバネや万有引力などの位置エネルギーを計算する場合にも応用できる.

おまけ: 定義から定積分の計算

実際に $\int_0^1 x^2 dx$ を計算してみよう.

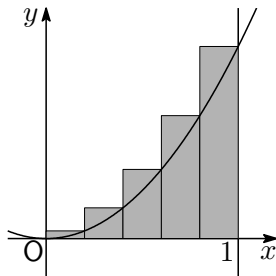
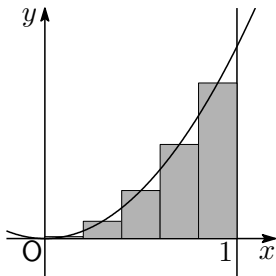
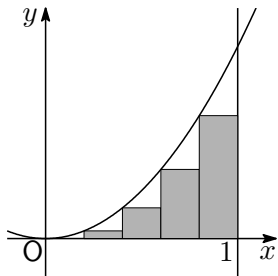


原始関数を用いれば

$$\int_0^1 x^2 dx = \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_0^1 = \frac{1}{3} 1^3 - \frac{1}{3} 0^3 = \frac{1}{3}.$$

これを面積を考える立場から計算する.

5等分にして考えると...

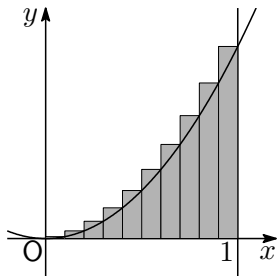
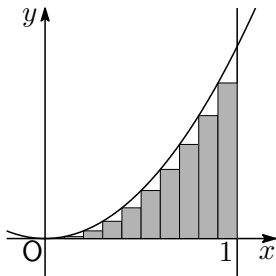


左: $0^2 \frac{1}{5} + \left(\frac{1}{5}\right)^2 \frac{1}{5} + \left(\frac{2}{5}\right)^2 \frac{1}{5} + \left(\frac{3}{5}\right)^2 \frac{1}{5} + \left(\frac{4}{5}\right)^2 \frac{1}{5} = \frac{6}{25} = 0.24.$

中: $\left(\frac{1}{10}\right)^2 \frac{1}{5} + \left(\frac{3}{10}\right)^2 \frac{1}{5} + \left(\frac{5}{10}\right)^2 \frac{1}{5} + \left(\frac{7}{10}\right)^2 \frac{1}{5} + \left(\frac{9}{10}\right)^2 \frac{1}{5} = \frac{33}{100} = 0.33$

右: $\left(\frac{1}{5}\right)^2 \frac{1}{5} + \left(\frac{2}{5}\right)^2 \frac{1}{5} + \left(\frac{3}{5}\right)^2 \frac{1}{5} + \left(\frac{4}{5}\right)^2 \frac{1}{5} + 1^2 \frac{1}{5} = \frac{11}{25} = 0.44.$

より細かくする (n 等分).



左 (少なく見積もったもの)

$$\sum_{k=1}^n \left(\frac{k-1}{n}\right)^2 \frac{1}{n} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k^2}{n^3} = \frac{(n-1)n\{2(n-1)+1\}}{6n^3} = \frac{1}{6}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{1}{n}\right).$$

右 (多く見積もったもの)

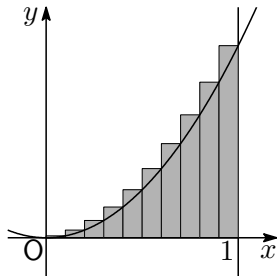
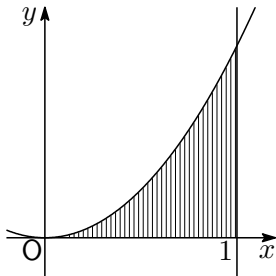
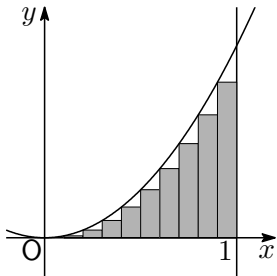
$$\sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n}\right)^2 \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^n \frac{k^2}{n^3} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3} = \frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right).$$

分割の幅 $\frac{1}{n}$ が 0 に近ければ誤差はほぼ 0 ということで、
分割数 n を限りなく増やせば、

$$\text{左: } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{6} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(2 - \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{6} (1 - 0) (2 - 0) = \frac{1}{3}.$$

$$\text{右: } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{6} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(2 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{6} (1 + 0) (2 + 0) = \frac{1}{3}.$$

いずれにしても $\frac{1}{3}$ となり、原始関数を用いた結果と一致した。



$\int_0^1 a^x dx \ (a > 1)$ を面積を考える立場から計算する. ちなみに,

$$\int_0^1 a^x dx = \left[\frac{a^x}{\log a} \right]_0^1 = \frac{a^1}{\log a} - \frac{a^0}{\log a} = \frac{a-1}{\log a}.$$

先ほどと同じように幅が $\frac{1}{n}$ の短冊状に切る.

少なく見積もったものは

$$\sum_{k=1}^n a^{\frac{k-1}{n}} \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} (a^{\frac{1}{n}})^{k-1} = \frac{1}{n} \frac{(a^{\frac{1}{n}})^n - 1}{a^{\frac{1}{n}} - 1} = \frac{\frac{1}{n}(a-1)}{a^{\frac{1}{n}} - 1}.$$

多く見積もったものは

$$\sum_{k=1}^n a^{\frac{k}{n}} \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^n \frac{a^{\frac{1}{n}}}{n} (a^{\frac{1}{n}})^{k-1} = \frac{a^{\frac{1}{n}}}{n} \frac{(a^{\frac{1}{n}})^n - 1}{a^{\frac{1}{n}} - 1} = \frac{a^{\frac{1}{n}} \frac{1}{n}(a-1)}{a^{\frac{1}{n}} - 1}.$$

さて, $\lim_{n \rightarrow \infty} a^{\frac{1}{n}} = 1$ なので, 問題なのは $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n}}{a^{\frac{1}{n}} - 1}$ である.

$\frac{1}{n} = t$ とおけば, $n \rightarrow \infty$ は $t \rightarrow +0$ に変わり,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n}}{a^{\frac{1}{n}} - 1} = \lim_{t \rightarrow +0} \frac{t}{a^t - 1}.$$

これは $f(x) = a^x$ の $x = 0$ における微分係数 $f'(0)$ の逆数を求める極限值である. $f'(x) = a^x \log a$ なので, この極限値は $\frac{1}{\log a}$ である.

以上から, 少なく見積もったものも, 多く見積もったものも, 分割数を多くするとほぼ $\frac{a-1}{\log a}$ となってくれるので, 原始関数を用いて計算した結果と一致した.

分割は等分にしない方が計算しやすい場合もある.

$\int_1^a \frac{1}{x} dx$ ($a > 1$) を面積を考える立場から計算する. ちなみに,

$$\int_1^a \frac{1}{x} dx = \left[\log |x| \right]_1^a = \log a - \log 1 = \log a.$$

$[1, a]$ の分割を次のようにする.

$$1 = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = a, \quad x_k = a^{\frac{k}{n}} \quad (k = 0, 1, \cdots, n).$$

$\frac{1}{x}$ は $x > 0$ のとき単調減少であることに注意しよう.

少なく見積もったものは

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n \frac{1}{x_k} (x_k - x_{k-1}) &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{a^{\frac{k}{n}}} (a^{\frac{k}{n}} - a^{\frac{k-1}{n}}) = \sum_{k=1}^n (1 - a^{-\frac{1}{n}}) \\ &= n (1 - a^{-\frac{1}{n}}) = a^{-\frac{1}{n}} n (a^{\frac{1}{n}} - 1).\end{aligned}$$

多く見積もったものは

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n \frac{1}{x_{k-1}} (x_k - x_{k-1}) &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{a^{\frac{k-1}{n}}} (a^{\frac{k}{n}} - a^{\frac{k-1}{n}}) = \sum_{k=1}^n (a^{\frac{1}{n}} - 1) \\ &= n (a^{\frac{1}{n}} - 1).\end{aligned}$$

さて, $\lim_{n \rightarrow \infty} a^{\frac{1}{n}} = 1$ なので, 問題なのは $\lim_{n \rightarrow \infty} n(a^{\frac{1}{n}} - 1)$ である.

$\frac{1}{n} = t$ とおけば, $n \rightarrow \infty$ は $t \rightarrow +0$ に変わり,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n(a^{\frac{1}{n}} - 1) = \lim_{t \rightarrow +0} \frac{a^t - 1}{t} = (a^x)'|_{x=0} = \log a.$$

以上から, 少なく見積もったものも, 多く見積もったものも, 分割数を多くするとほぼ $\log a$ となってくれるので, 原始関数を用いて計算した結果と一致した.