

微分積分 2(積分) 自習スライド (Part 2)

積分の基本公式

鈴木 敏行

神奈川大学

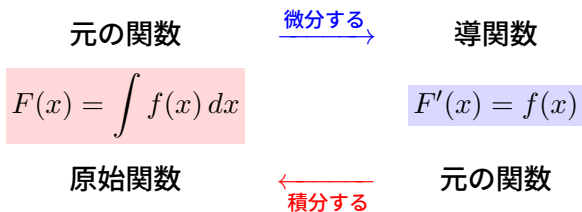
2023 年 03 月 01 日

※ 転載や再配布を禁止する.

<http://t21suzuki.html.xdomain.jp/>

原始関数 (不定積分) の計算

連続関数の不定積分の公式を導くにあたって, $F'(x) = f(x)$ となる関数 $F(x)$ が見つければ, それが $f(x)$ の原始関数である.



これ以降, $f(x)$ の不定積分を求めるにあたって, 微分したら $f(x)$ になるような元の関数をどうにかして見つける作業を行う.

$F(x)$ を $f(x)$ の原始関数とすると, $f(x)$ の原始関数は $F(x) + C$ のみ.

$f(x)$ の原始関数を $F_1(x), F_2(x)$ とする. $H(x) = F_2(x) - F_1(x)$ とおくと

$$H'(x) = F_1'(x) - F_2'(x) = f(x) - f(x) = 0.$$

$H(x)$ に平均値の定理を用いると,

$$\frac{H(x) - H(a)}{x - a} = H'(c_x) = 0, \quad (c_x \text{ は } x \text{ と } a \text{ との間}).$$

したがって, $H(x) = H(a) = C$ (定数). ゆえに $F_2(x) = F_1(x) + C$.

この C を**積分定数**というが, 以降の計算では省略する. 積分定数は定積分などには不要だが, 微分方程式を考える際には必要である.

$F(x)$ を $f(x)$ の, $G(x)$ を $g(x)$ の原始関数の 1 つとすると,
 $\alpha f(x) + \beta g(x)$ の原始関数は $\alpha F(x) + \beta G(x) + C$ (C は積分定数).

$H(x) = \alpha F(x) + \beta G(x)$ とおくと

$$H'(x) = \alpha F'(x) + \beta G'(x) = \alpha f(x) + \beta g(x).$$

これは, $H(x)$ が $\alpha f(x) + \beta g(x)$ の原始関数であることを意味している.

以上から微分の公式と同様に, 積分についても基本的な関数について考えればよいことになる.

公式 1: x^a の原始関数

$(x^a)' = a x^{a-1}$ だから $(x^{a+1})' = (a+1)x^a$. ゆえに

$$\left(\frac{1}{a+1} x^{a+1} \right)' = \frac{1}{a+1} (a+1) x^a = x^a.$$

$a+1$ で割ったので, これが 0 になる $a = -1$ は別に考えないといけない.
そういえば

$$(\log x)' = \frac{1}{x} \quad (x > 0), \quad (\log(-x))' = \frac{1}{-x} \times (-x)' = \frac{1}{x} \quad (x < 0).$$

以上から

$$\int x^a dx = \begin{cases} \frac{1}{a+1} x^{a+1} & a \neq -1, \\ \log |x| & a = -1. \end{cases}$$

公式 2: 指数関数 a^x の原始関数

$(a^x)' = a^x \log a$ だから

$$\left(\frac{1}{\log a} a^x \right)' = a^x.$$

ゆえに

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\log a}. \quad \text{特に } \int e^x dx = e^x.$$

公式 3: 三角関数 $\sin x, \cos x$ の原始関数

$(\sin x)' = \cos x, (\cos x)' = -\sin x$ なので

$$\begin{aligned} (-\cos x)' &= \sin x, & (\sin x)' &= \cos x. \\ \therefore \int \sin x dx &= -\cos x, & \int \cos x dx &= \sin x. \end{aligned}$$

微分公式と符号が違うので注意すること.

積分定数を省略する場合, 積分定数は省略する と書かなければいけない.

積分定数を省略せず書く場合, C は (積分) 定数とする と書かなければいけない (積分定数の 積分 は省略してもよい).

C は constant (定数) に由来しているが, 別の文字を使ってよい.

例 2.1.

$$(1) \int \left(8\sqrt[3]{x} - \frac{6}{x\sqrt{x}} \right) dx = \int (8x^{\frac{1}{3}} - 6x^{-\frac{3}{2}}) dx = 8 \times \frac{3}{4} x^{\frac{4}{3}} - 6 \times \frac{2}{-1} x^{-\frac{1}{2}} \\ = 6x^{\frac{3}{2}} + 12x^{-\frac{1}{2}}.$$

$$(2) \int (2e^x - 3 \sin x) dx = 2 \times e^x - 3 \times (-\cos x) = 2e^x + 3 \cos x.$$

不定積分の記号の注意

$\int$ と dx は積分の定義を見ると欠かすことができないもの。

本来省略してはいけない。

dx についてはある程度位置については自由に置くことができる。

$$\int f(x) dx \Rightarrow \int dx f(x).$$

ただし、どこまでの関数を積分するのかがわかるようにしてほしい。

$$\int (f(x) + g(x)) dx \Rightarrow \int f(x) + g(x) dx, \quad \int dx (f(x) + g(x)).$$

括弧 () は省略可能

() を省略できない!

どこまでの関数を積分するのかの
範囲を明確にするため

また、積分する関数が分数式の場合、 dx を分子に乘せることがある。

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx \Rightarrow \int \frac{P(x) dx}{Q(x)}, \quad \int \frac{1}{Q(x)} dx \Rightarrow \int \frac{dx}{Q(x)}.$$

公式 4

$(\sin^{-1} x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ であった。そこで、合成関数の微分法から

$$\left(\sin^{-1} \frac{x}{a}\right)' = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}} \times \frac{1}{a} = \frac{1}{\sqrt{\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)a^2}} = \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}. \quad (a > 0)$$

したがって、

$$\left(\sin^{-1} \frac{x}{a}\right)' = \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}, \quad \therefore \int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} dx = \sin^{-1} \frac{x}{a},$$

公式 5

$(\tan^{-1} x)' = \frac{1}{1+x^2}$ であった。そこで、合成関数の微分法から

$$\left(\tan^{-1} \frac{x}{a}\right)' = \frac{1}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2} \times \frac{1}{a} = \frac{a}{\left(1+\frac{x^2}{a^2}\right)a^2} = \frac{a}{a^2+x^2}. \quad (a > 0)$$

したがって、

$$\left(\frac{1}{a} \tan^{-1} \frac{x}{a}\right)' = \frac{1}{a^2+x^2}. \quad \therefore \int \frac{1}{a^2+x^2} dx = \frac{1}{a} \tan^{-1} \frac{x}{a}.$$

例 2.2.

$$\begin{aligned}(1) \quad \int \frac{4}{\sqrt{4-x^2}} dx &= \int 4 \times \frac{1}{\sqrt{2^2-x^2}} dx = 4 \times \sin^{-1} \frac{x}{2} \\ &= 4 \sin^{-1} \frac{x}{2}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(2) \quad \int \frac{9}{x^2+3} dx &= \int 9 \times \frac{1}{(\sqrt{3})^2+x^2} dx = 9 \times \frac{1}{\sqrt{3}} \tan^{-1} \frac{x}{\sqrt{3}} \\ &= 3\sqrt{3} \tan^{-1} \frac{x}{\sqrt{3}}.\end{aligned}$$

公式 6: $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \log |f(x)|$ (積分定数は省略).

$F(x) = \log |f(x)|$ とすると, 合成関数の微分法より,

$$F'(x) = \frac{1}{f(x)} f'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}.$$

したがって, $F(x)$ は $\frac{f'(x)}{f(x)}$ の原始関数である.

例 2.3.

$$\begin{aligned}(1) \quad & \int \frac{x^2}{x^3 + 1} dx \quad (x^3 + 1)' = 3x^2 \\ &= \int \frac{\frac{1}{3} 3x^2}{x^3 + 1} dx = \int \frac{1}{3} \frac{(x^3 + 1)'}{x^3 + 1} dx = \frac{1}{3} \log |x^3 + 1|.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(2) \quad & \int \frac{\sin x}{2 + \cos x} dx \quad (2 + \cos x)' = -\sin x \\ &= \int \frac{-(-\sin x)}{2 + \cos x} dx = \int -\frac{(2 + \cos x)'}{2 + \cos x} dx \\ &= -\log |2 + \cos x| = -\log(2 + \cos x). \quad 2 + \cos x > 0 \text{ に注意!}\end{aligned}$$

公式 7: $F(x)$ が $f(x)$ の原始関数ならば,

$$\int f(ax + b) dx = \frac{1}{a} F(ax + b).$$

$H(x) = \frac{1}{a} F(ax + b)$ とおくと, 合成関数の微分法から,

$$H'(x) = \frac{1}{a} F'(ax + b) (ax + b)' = \frac{1}{a} f(ax + b) a = f(ax + b).$$

これは $H(x)$ が $f(ax + b)$ の原始関数であることを意味している.

注意. $f(\cdot)$ の変数の部分が 2 次以上の場合には使えない!

ちなみに, $d(ax + b) = a dx$ と書くことを許してもらえるのならば,

$$\begin{aligned} \int f(ax + b) dx &= \int f(ax + b) \frac{d(ax + b)}{a} = \int f(ax + b) \frac{1}{a} d(ax + b) \\ &= \frac{1}{a} \int f(ax + b) d(ax + b) = \frac{1}{a} F(ax + b). \end{aligned}$$

例 2.4.

$$\begin{aligned}(1) \quad \int 4 \sin 6x \, dx & \quad \int \sin \square \, d\square = -\cos \square \\ &= \int 4 \sin 6x \frac{d(6x)}{6} = 4 \times \frac{1}{6} \times (-\cos 6x) = -\frac{2}{3} \cos 6x.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(2) \quad \int \frac{8}{4x+3} \, dx & \quad \int \square^{-1} \, d\square = \log |\square| \\ &= \int 8(4x+3)^{-1} \, dx = \int 8(4x+3)^{-1} \frac{d(4x+3)}{4} \\ &= 8 \times \frac{1}{4} \log |4x+3| = 2 \log |4x+3|.\end{aligned}$$

積分計算の融合問題を考えてみる.

例 2.5. $\int \frac{1}{\sqrt{4x - x^2}} dx.$

積分する関数を変形すると (根号内を平方完成)

$$\frac{1}{\sqrt{4x - x^2}} = \frac{1}{\sqrt{-(x^2 - 4x)}} = \frac{1}{\sqrt{-(x - 2)^2 + 2^2}} = \frac{1}{\sqrt{2^2 - (x - 2)^2}}$$

したがって,

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\sqrt{4x - x^2}} dx &= \int \frac{1}{\sqrt{2^2 - (x - 2)^2}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{2^2 - (x - 2)^2}} d(x - 2) \\ &= \sin^{-1} \frac{x - 2}{2}. \end{aligned}$$

※ 積分する関数を被積分関数ということがある.

積分の基本公式についてまとめておこう.

$$\textcircled{1} \int x^a dx = \begin{cases} \frac{1}{a+1} x^{a+1} & (a \neq -1), \\ \log |x| & (a = -1). \end{cases}$$

$$\textcircled{2} \int a^x dx = \frac{a^x}{\log a}. \quad \text{特に, } \int e^x dx = e^x.$$

$$\textcircled{3} \int \sin x dx = -\cos x.$$

$$\textcircled{4} \int \cos x dx = \sin x.$$

$$\textcircled{5} \int \frac{1}{a^2 + x^2} dx = \frac{1}{a} \tan^{-1} \frac{x}{a}. \quad \textcircled{6} \int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \sin^{-1} \frac{x}{a}.$$

$$\textcircled{7} \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \log |f(x)|. \quad \textcircled{8} \int f(ax + b) dx = \frac{1}{a} F(ax + b).$$

$F(x)$ は $f(x)$ の原始関数 (不定積分) の1つとする.

なお, ⑦ と ⑧ については, 次のようにとらえて計算してくれて構わない.

$$\text{⑦ } df(x) = f'(x) dx \text{ とみて,}$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \int \frac{f'(x) dx}{f(x)} = \int \frac{df(x)}{f(x)} = \log |f(x)|.$$

$$\text{⑧ } d(ax + b) = a dx \text{ とみて,}$$

$$\begin{aligned} \int f(ax + b) dx &= \int f(ax + b) \frac{a dx}{a} = \int \frac{1}{a} f(ax + b) d(ax + b) \\ &= \frac{1}{a} F(ax + b). \end{aligned}$$

おまけ 1: 三角関数 $\frac{1}{\cos^2 x}$, $\frac{1}{\sin^2 x}$ の原始関数

$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$ は公式通りである. 一方, $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ に注意すると

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{\tan x}\right)' &= \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' = \frac{(\cos x)' \sin x - \cos x (\sin x)'}{\sin^2 x} \\ &= \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}.\end{aligned}$$

したがって,

$$\begin{aligned}(\tan x)' &= \frac{1}{\cos^2 x}, & \left(-\frac{1}{\tan x}\right)' &= \frac{1}{\sin^2 x}. \\ \therefore \int \frac{dx}{\cos^2 x} &= \tan x, & \int \frac{dx}{\sin^2 x} &= -\frac{1}{\tan x}.\end{aligned}$$

この公式が有効になる問題はあまりないので覚えていなくてもよい.

おまけ 2: $\frac{1}{\sqrt{x^2 + A}}$ の原始関数

少々突飛な積分公式があるので、覚える必要はさらさらないが、紹介だけはしておこう。

$F(x) = \log |x + \sqrt{x^2 + A}|$ について、合成関数の微分法より

$$\begin{aligned} F'(x) &= \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + A}} (x + \sqrt{x^2 + A})' \\ &= \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + A}} \left(1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + A}} \right) \\ &= \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + A}} \frac{\sqrt{x^2 + A} + x}{\sqrt{x^2 + A}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + A}}. \end{aligned}$$

これより、次の積分公式を導くことができる。

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + A}} dx = \log |x + \sqrt{x^2 + A}|.$$

おまけ 3: ある複雑な関数の原始関数

この後紹介する部分積分法を用いても面倒な積分の計算も、積分の計算が微分の逆操作ということで比較的楽に計算できることがある。

$f(x) = e^{ax} \cos bx$, $g(x) = e^{ax} \sin bx$ とする。このとき,

$$\begin{aligned} f'(x) &= (e^{ax})' \cos bx + e^{ax} (\cos bx)' = a e^{ax} \cos bx + e^{ax} (-b \sin bx) \\ &= a f(x) - b g(x), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g'(x) &= (e^{ax})' \sin bx + e^{ax} (\sin bx)' = a e^{ax} \sin bx + e^{ax} (b \cos bx) \\ &= a g(x) + b f(x) = b f(x) + a g(x). \end{aligned}$$

これより, $f(x)$, $g(x)$ について解けば,

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{a f'(x) + b g'(x)}{a^2 + b^2} = \left(\frac{a f(x) + b g(x)}{a^2 + b^2} \right)', \\ g(x) &= \frac{-b f'(x) + a g'(x)}{a^2 + b^2} = \left(\frac{-b f(x) + a g(x)}{a^2 + b^2} \right)'. \end{aligned}$$

この式が意味することは,

$$\int f(x) dx = \frac{a f(x) + b g(x)}{a^2 + b^2}, \quad \int g(x) dx = \frac{-b f(x) + a g(x)}{a^2 + b^2}.$$

それゆえに,

$$\begin{aligned} \int e^{ax} \cos bx \, dx &= \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} (a \cos bx + b \sin bx), \\ \int e^{ax} \sin bx \, dx &= \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} (-b \cos bx + a \sin bx). \end{aligned}$$

このように, 上手く思いつけば, その関数の不定積分を求められるが, それらは試行錯誤の上でできたものである.

もちろん, 楽に, 着実に, できる方法を考えた方がいいに決まっている.