微分積分 2(積分) 自習スライド (Part 4)
部分積分法 (不定積分)

鈴木 敏行

神奈川大学

2023 年 03 月 01 日

http://t21suzuki.html.xdomain.jp/

部分積分法

積分を計算するうえで, 必要となってくる部分積分法について紹介する.

その前に, 積の微分法を思い出しておこう.

$$\{f(x)\,g(x)\}' = f'(x)\,g(x) + f(x)\,g'(x).$$

これは $f(x)\,g(x)$ が $f'(x)\,g(x) + f(x)\,g'(x)$ の原始関数 (不定積分) であることを表している.

$$\begin{aligned} f(x)\,g(x) &= \int f'(x)\,g(x) + f(x)\,g'(x)\,dx \\ &= \int f'(x)\,g(x)\,dx + \int f(x)\,g'(x)\,dx. \end{aligned}$$

左辺と右辺とを入れ替え, $\displaystyle\int f(x)\,g'(x)\,dx$ を移項することで,

次の部分積分の公式が示される.

2 微分

$$\int f'(x)\, g(x)\, dx = f(x)\, g(x) - \int f(x)\, g'(x)\, dx$$

1 積分

積分したものは戻さない!

先に積分する優先順位

1. 指数関数 (e^{ax})
2. 三角関数 ($\sin ax, \cos ax$)
3. べき乗/多項式 (x^a)

もちろん, 思いついた側から積分して構わないが, せっかく積分したものを微分してしまうようなことだけは避けるように.

例 4.1. $\displaystyle\int x\, e^{2x}\, dx$

$$\int x\, \boxed{e^{2x}}\, dx = \int x \boxed{\left(\frac{e^{2x}}{2}\right)'}\, dx = \boxed{x}\, \frac{1}{2}e^{2x} - \int (x)'\, \frac{1}{2}e^{2x}\, dx$$
$$= \frac{1}{2}x\, e^{2x} - \int \frac{1}{2}e^{2x}\, dx$$
$$= \frac{1}{2}x\, e^{2x} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}e^{2x}$$
$$= \frac{1}{2}x\, e^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x} = \frac{2x-1}{4}e^{2x}.$$

例 4.2. $\displaystyle\int x\ \cos 3x\,dx$

$$
\begin{aligned}
\int x\ \cos 3x\ dx &= \int x \left(\frac{\sin 3x}{3}\right)' dx = x\,\frac{1}{3}\sin 3x - \int (x)'\,\frac{1}{3}\sin 3x\,dx \\
&= \frac{1}{3}x\ \sin 3x - \int \frac{1}{3}\sin 3x\,dx \\
&= \frac{1}{3}x\ \sin 3x - \frac{1}{3}\times\frac{1}{3}(-\cos 3x) \\
&= \frac{1}{3}x\ \sin 3x + \frac{1}{9}\cos 3x.
\end{aligned}
$$

1 が隠れていると考えることがある.

例 4.3. $\displaystyle\int \log x\,dx$

$$
\begin{aligned}
\int \log x\,dx &= \int 1 \log x\,dx = \int (x)' \log x\,dx \\
&= x \log x - \int x\,(\log x)'\,dx \\
&= x \log x - \int x \times \frac{1}{x}\,dx \\
&= x \log x - \int 1\,dx = x \log x - x.
\end{aligned}
$$

先に積分するとき, 積分定数を調整するとうまく計算できることもある.

例 4.4. $\displaystyle\int x \log(x+1)\,dx$

$$
\begin{aligned}
\int x \log(x+1)\,dx &= \int \left(\frac{x^2-1}{2}\right)' \log(x+1)\,dx \\
&= \frac{1}{2}(x^2-1)\log(x+1) - \int \frac{1}{2}(x^2-1)\left(\log(x+1)\right)'\,dx \\
&= \frac{1}{2}(x^2-1)\log(x+1) - \int \frac{1}{2}(x+1)(x-1) \times \frac{1}{x+1}\,dx \\
&= \frac{1}{2}(x^2-1)\log(x+1) - \int \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\,dx \\
&= \frac{1}{2}(x^2-1)\log(x+1) - \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x\right) \\
&= \frac{1}{2}(x^2-1)\log(x+1) - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x.
\end{aligned}
$$

微分積分は 1 回だけでなく, 複数回行う場合もある.

例 4.5. $\displaystyle\int x^2\, e^{-x}\, dx$

$$\begin{aligned}\int x^2\, e^{-x}\, dx &= \int x^2\, (-e^{-x})'\, dx = x^2\, (-e^{-x}) - \int (x^2)'\, (-e^{-x})\, dx \\ &= -x^2\, e^{-x} - \int -2x\, e^{-x}\, dx \quad \text{もう 1 回部分積分} \\ &= -x^2\, e^{-x} - \int -2x\, (-e^{-x})'\, dx \\ &= -x^2\, e^{-x} - \left(-2x\, (-e^{-x}) - \int (-2x)'\, (-e^{-x})\, dx \right) \\ &= -x^2\, e^{-x} - \left(2x\, e^{-x} - \int 2e^{-x}\, dx \right) \\ &= -x^2\, e^{-x} - \left(2x\, e^{-x} - 2 \times \frac{e^{-x}}{-1} \right) \\ &= -x^2\, e^{-x} - 2x\, e^{-x} - 2\, e^{-x} = -e^{-x}\, (x^2 + 2x + 2).\end{aligned}$$

これは覚えておく必要はないのだが, 一般に

$$\int f^{(n)}(x)\,g(x)\,dx = f^{(n-1)}(x)\,g(x) - f^{(n-2)}(x)\,g'(x) + \cdots + (-1)^{n-1} f(x)\,g^{(n-1)}(x) + (-1)^n \int f(x)\,g^{(n)}(x)\,dx$$

が成立する. $n = 2$ のときは

$$\int f''(x)\,g(x)\,dx = f'(x)\,g(x) - f(x)\,g'(x) + \int f(x)\,g''(x)\,dx.$$

指数関数と三角関数が混ざった場合には注意が必要である.

例 4.6. $\int e^x \sin x \, dx$

$$\int e^x \sin x\,dx = \int (e^x)' \sin x\,dx = e^x \sin x - \int e^x (\sin x)'\,dx$$

$$= e^x \sin x - \int e^x \cos x\,dx \quad \text{もう 1 回部分積分}$$

$$= e^x \sin x - \left(\int e^x \cos x\,dx\right) = e^x \sin x - \left(\int (e^x)' \cos x\,dx\right)$$

$$= e^x \sin x - \left(e^x \cos x - \int e^x (\cos x)'\,dx\right)$$

$$= e^x \sin x - \left(e^x \cos x - \int e^x (-\sin x)\,dx\right)$$

$$= e^x \sin x - e^x \cos x - \int e^x \sin x\,dx. \quad \Leftarrow \text{求めたい不定積分がまた出た}$$

ここで $I = \int e^x \sin x \, dx$ とおけば,

$$I = e^x \sin x - e^x \cos x - I.$$

これを I について解けばよく,

$$I + I = e^x(\sin x - \cos x). \quad \therefore \ I = \frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x).$$

この問題の場合, 部分積分を用いずに求めることが可能である.

別解 (こっちの方が楽)

オイラーの公式より,

$$e^{(1+i)x} = e^{x+i\,x} = e^x\, e^{i\,x} = e^x(\cos x + i\ \sin x).$$

したがって, 被積分関数 $e^x\ \sin x$ は $e^{(1+i)x}$ の虚部である.

$$\int e^{(1+i)x}\, dx = \frac{1}{1+i}e^{(1+i)x} = \frac{(1-i)}{(1+i)(1-i)}\, e^x(\cos x + i\ \sin x)$$

$$= \frac{1-i}{2}\, e^x(\cos x + i\ \sin x) \quad (1-i)(1+i) = 1^2 - i^2 = 1-(-1) = 2$$

$$= \frac{1}{2}e^x\left(\cos x + i\ \sin x - i\ \cos x - i^2\ \sin x\right)$$

$$= \frac{1}{2}e^x\left[\left(\cos x + \sin x\right) + i\left(\sin x - \cos x\right)\right].$$

この虚部を取り出せば,

$$\int e^x\ \sin x\, dx = \frac{1}{2}e^x\left(\sin x - \cos x\right).$$

部分積分の例を更に紹介する.

例 4.7. $\displaystyle\int \tan^{-1} x\,dx$

$$\begin{aligned}
\int \tan^{-1} x\,dx &= \int \boxed{1}\ \tan^{-1} x\,dx = \int \boxed{(x)'}\ \tan^{-1} x\,dx \\
&= x\ \boxed{\tan^{-1} x} - \int x\,(\tan^{-1} x)'\,dx \\
&= x\ \tan^{-1} x - \int x\,\frac{1}{1+x^2}\,dx = x\ \tan^{-1} x - \int \frac{\frac{1}{2}(1+x^2)'}{1+x^2}\,dx \\
&= x\ \tan^{-1} x - \frac{1}{2}\log(1+x^2).
\end{aligned}$$

例 4.8. $\displaystyle\int \sin^{-1} x\,dx$

$$\int \sin^{-1} x\,dx = \int \boxed{1}\ \sin^{-1} x\,dx = \int \boxed{(x)'}\ \sin^{-1} x\,dx$$

$$= x\ \boxed{\sin^{-1} x} - \int x\,(\sin^{-1} x)'\,dx$$

$$= x\ \sin^{-1} x - \int x\,\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \quad t = 1 - x^2,\ dt = -2x\,dx$$

$$= x\ \sin^{-1} x - \int x\,\frac{1}{t^{\frac{1}{2}}}\,\frac{1}{-2x}\,dt = x\ \sin^{-1} x - \int -\frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}}\,dt$$

$$= x\ \sin^{-1} x - \left(-\frac{1}{2} \times \frac{2}{1}t^{\frac{1}{2}}\right) = x\ \sin^{-1} x + (1-x^2)^{\frac{1}{2}}.$$

例 4.9. $\displaystyle\int \log(1+x^2)\,dx$

$$
\begin{aligned}
\int \log(1+x^2)\,dx &= \int \boxed{1}\ \log(1+x^2)\,dx = \int \boxed{(x)'}\ \log(1+x^2)\,dx \\
&= x\ \boxed{\log(1+x^2)} - \int x\,\big(\log(1+x^2)\big)'\,dx \\
&= x\ \log(1+x^2) - \int x\,\frac{2x}{1+x^2}\,dx \\
&= x\ \log(1+x^2) - \left(\int 2 - \frac{2}{1+x^2}\,dx\right) \qquad ※\ 2x^2 = 2(x^2+1) - 2 \\
&= x\ \log(1+x^2) - \left(2x - 2\tan^{-1}x\right) \\
&= x\ \log(1+x^2) - 2x + 2\tan^{-1}x.
\end{aligned}
$$

おまけ 2: 置換積分でも部分積分でもいい例

部分積分と置換積分, どちらでもできる場合もある.

例 4.10. $\displaystyle\int (5x+1)\sqrt{x+2}\,dx.$

(1) 置換積分　$t=\sqrt{x+2}$ と置くと, $t^2=x+2$ だから $x=t^2-2$.
$dx=2t\,dt$ より

$$\int (5x+1)\sqrt{x+2}\,dx = \int \{5(t^2-2)+1\}\,t\,2t\,dt$$

$$= \int (5t^2-9)\,2\,t^2\,dt \quad \leftarrow t\text{ だけの式になった}$$

$$= \int 10\,t^4 - 18\,t^2\,dt = 10\times\frac{1}{5}\,t^5 - 18\times\frac{1}{3}\,t^3$$

$$= 2\,t^5 - 6\,t^3 = 2\,t^3\,(t^2-3) = 2\,(\sqrt{x+2})^3\{(\sqrt{x+2})^2-3\}$$

$$= 2\,(x+2)\sqrt{x+2}\,(x+2-3)$$

$$= 2\,(x-1)\,(x+2)\sqrt{x+2}. \quad \leftarrow x\text{ の式に戻す}$$

(2) 部分積分

$$\int (5x+1)\sqrt{x+2}\,dx = \int (5x+1)\,(x+2)^{\frac{1}{2}}\,dx$$
$$= \int (5x+1)\left(\frac{2}{3}(x+2)^{\frac{3}{2}}\right)'dx$$
$$= (5x+1)\left(\frac{2}{3}(x+2)^{\frac{3}{2}}\right) - \int (5x+1)'\left(\frac{2}{3}(x+2)^{\frac{3}{2}}\right)dx$$
$$= \frac{2}{3}(5x+1)(x+2)^{\frac{3}{2}} - \int \frac{10}{3}(x+2)^{\frac{3}{2}}\,dx$$
$$= \frac{2}{3}(5x+1)(x+2)^{\frac{3}{2}} - \frac{10}{3}\times\frac{2}{5}(x+2)^{\frac{5}{2}}$$
$$= \frac{2}{3}(x+2)^{\frac{3}{2}}\{(5x+1)-2(x+2)\} = \frac{2}{3}(x+2)^{\frac{3}{2}}(3x-3)$$
$$= 2(x-1)(x+2)^{\frac{3}{2}}.$$

おまけ 3: 置換積分と部分積分を両方使う例

部分積分と置換積分の両方が必要な場合もある.

例 4.11. $\displaystyle\int (x^3 - 3x)\, e^{x^2}\, dx.$

$t = x^2$ と置くと, $dt = 2x\,dx$ だから $dx = \dfrac{1}{2x}\,dt$.

$$\int (x^3 - 3x)\, e^{x^2}\, dx = \int (x^3 - 3x)\, e^t\, \frac{1}{2x}\, dt$$

$$= \int \frac{1}{2} \boxed{(x^2 - 3)}\, e^t\, dt \quad \leftarrow x \text{ がまだ残っている}$$

$$= \int \frac{1}{2} \boxed{(t - 3)}\, e^t\, dt \quad \leftarrow t \text{ だけの式になった} \qquad \boxed{※\ x^2 = t}$$

この積分は, 部分積分が必要である.

$$
\begin{aligned}
\int \frac{1}{2}(t-3)\,e^t\,dt &= \int \frac{1}{2}(t-3)\,e^t\,dx = \int \frac{1}{2}(t-3)\,(e^t)'\,dx \\
&= \frac{1}{2}(t-3)\,(e^t) - \int \left(\frac{1}{2}(t-3)\right)'(e^t)\,dt \\
&= \frac{1}{2}(t-3)\,e^t - \int \frac{1}{2}\,e^t\,dt \\
&= \frac{1}{2}(t-3)\,e^t - \frac{1}{2}\,e^t = \frac{t-4}{2}\,e^t.
\end{aligned}
$$

したがって, 求める積分は

$$
\begin{aligned}
\int (x^3-3x)\,e^{x^2}\,dx &= \int \frac{1}{2}(t-3)\,e^t\,dt = \frac{t-4}{2}\,e^t \\
&= \frac{x^2-4}{2}\,e^{x^2}. \quad \leftarrow x \text{ の式に戻す}
\end{aligned}
$$