微分積分 2(積分) 自習スライド (Part 5)
有理関数の積分

鈴木 敏行

神奈川大学

2023 年 03 月 01 日

http://t21suzuki.html.xdomain.jp/

積分するために必要な事項の紹介が終わったので，具体的な関数に焦点を絞って，どのように積分すればよいのか見ていくことにしよう．

今回は**有理関数の積分**を考える.

有理関数とは, $\dfrac{\text{多項式}}{\text{多項式}}$ と表される関数のことである.

以下, 分母の次数 $>$ 分子の次数 とする.

分母の次数 $\leqq$ 分子の次数のとき, 割り算をして
分母の次数 $>$ 分子の次数になるようにする.

例 5.1.

$$\frac{4x^3-5x^2+7x-6}{x^2-2x+3}=4x+3+\frac{x-15}{x^2-2x+3}.$$

ここで,

$$\begin{array}{r|l}
\multicolumn{1}{r}{} & \quad 4x + \quad 3 \\ \cline{2-2}
x^2-2x+3 & 4x^3-5x^2+\ 7x-\ 6 \\
 & 4x^3-8x^2+12x \\ \cline{2-2}
 & \qquad\quad 3x^2-\ 5x-\ 6 \\
 & \qquad\quad 3x^2-\ 6x+\ 9 \\ \cline{2-2}
 & \qquad\qquad\qquad x-15
\end{array}$$

商の部分は多項式になるが, その積分は難しくないだろう.

分母が 1 次式の場合

積分で考えないといけない関数は $\dfrac{c}{a\,x+b}$ である.
これは次のように計算できる.

$$\int \frac{c}{a\,x+b}\,dx = \int \frac{\frac{c}{a}\times a}{a\,x+b}\,dx = \int \frac{c}{a}\times\frac{(a\,x+b)'}{a\,x+b}\,dx = \frac{c}{a}\,\log|a\,x+b|.$$

係数の処理や絶対値を忘れないように.

例 5.2.

(1) $\displaystyle\int \frac{3}{1-x}\,dx = \int -3\times\frac{-1}{1-x}\,dx = \int -3\times\frac{(1-x)'}{1-x}\,dx$

$\displaystyle= -3\,\log|1-x|.$

(2) $\displaystyle\int \frac{4x^2-4x+1}{2x+1}\,dx = \int \frac{(2x+1)(2x-3)+4}{2x+1}\,dx$

$\displaystyle= \int 2x-3+\frac{4}{2x+1}\,dx = \int 2x-3+4\times\frac{\frac{1}{2}\,(2x+1)'}{2x+1}\,dx$

$\displaystyle= 2\times\frac{1}{2}x^2-3\,x+4\times\frac{1}{2}\,\log|2x+1| = x^2-3x+2\,\log|2x+1|.$

分母が 2 次式の場合

話を簡単にするため, 分母の最高次の係数を 1 にする.
考える関数は $\dfrac{p\,x+q}{x^2+a\,x+b}$ である.

もし, この関数が $\dfrac{2c\,x+c\,a}{x^2+a\,x+b}=\dfrac{c\,(x^2+a\,x+b)'}{x^2+a\,x+b}$ となる場合には,

$$\int\frac{p\,x+q}{x^2+a\,x+b}\,dx=\int\frac{c\,(x^2+a\,x+b)'}{x^2+a\,x+b}\,dx=c\,\log\left|x^2+a\,x+b\right|.$$

最初からこのような状況になっていることは非常にまれなケースである.

ところで, 2 次式といえば, 平方完成や判別式であろうか.
分母の形に着目して分類して考えよう.

分母 $x^2 + a\,x + b$ の判別式は $D = a^2 - 4\,b$ であった.

$\boxed{\text{A}}$ $D > 0$ このとき, 実数の範囲で因数分解できる!

$$x^2 + a\,x + b = (x - \alpha)\,(x - \beta). \quad \alpha \neq \beta.$$

$\boxed{\text{B}}$ $D = 0$ このとき, 2 乗の形に因数分解できる!

$$x^2 + a\,x + b = (x - \alpha)^2.$$

$\boxed{\text{C}}$ $D < 0$ このとき, 実数の範囲では因数分解できない.
平方完成ならできる!

$$x^2 + a\,x + b = (x - \alpha)^2 + \beta^2.$$

$\boxed{\text{A}}$ $D > 0$ の場合の積分

実数の範囲では, 分母が $x^2 + a\,x + b = (x-\alpha)(x-\beta)$ と因数分解できる.

$$\frac{p\,x + q}{x^2 + a\,x + b} = \frac{A}{x-\alpha} + \frac{B}{x-\beta}$$

とできたらいいなぁと考えてみる.

$$\frac{A}{x-\alpha} + \frac{B}{x-\beta} = \frac{A\,(x-\beta) + B\,(x-\alpha)}{(x-\alpha)\,(x-\beta)} = \frac{(A+B)\,x - (\beta\,A + \alpha\,B)}{x^2 + a\,x + b}.$$

これが, $\dfrac{p\,x + q}{x^2 + a\,x + b}$ と一致するから,

$$A + B = p, \quad -(\beta\,A + \alpha\,B) = q.$$

これを $(A,\,B)$ についての連立方程式として解が 1 つに求められるためには, $\alpha \neq \beta$ であればよい.

このように,

$$\frac{p\,x+q}{x^2+a\,x+b}=\frac{A}{x-\alpha}+\frac{B}{x-\beta}$$

とすることを**部分分数分解する**という.

$\boxed{\text{A}}$のパターンは上のような部分分数分解をしてしまえばいいのである.

この A, B を 決める方法はいくつかあるが, 代表的な方法を紹介しよう.

例 5.3.

$$\frac{5x-4}{x^2-3x+2}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-2}?$$

方法 1: 通分する

$$\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-2}=\frac{A\,(x-2)}{(x-1)\,(x-2)}+\frac{B\,(x-1)}{(x-2)\,(x-1)}$$
$$=\frac{A\,(x-2)+B\,(x-1)}{(x-2)\,(x-1)}=\frac{(A+B)\,x+(-2\,A-B)}{x^2-3x+2}.$$

これが $\dfrac{5x-4}{x^2-3x+2}$ だから,

$$A+B=5,\ -2\,A-B=-4.\quad A=-1,\ B=6.$$

方法 2: 分母を払う

両辺に $x^2-3x+2=(x-1)(x-2)$ を掛けると,

$$5x-4=A\,(x-2)+B\,(x-1).$$

$$x=1\Rightarrow 1=-1\,A+0\,B.\quad \therefore\ A=-1.$$
$$x=2\Rightarrow 6=0\,A+1\,B.\quad \therefore\ B=6.$$

この部分分数分解を用いて，積分を計算してみよう．

例 5.4. $\displaystyle\int \frac{3x+1}{x^2-2x-3}\,dx.$

$x^2-2x-3=(x+1)(x-3)$ より

$$\frac{3x+1}{x^2-2x-3}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-3}.$$

両辺に $x^2-2x-3=(x+1)(x-3)$ をかけると，

$$3x+1=A\,(x-3)+B\,(x+1).$$

$$x=-1\Rightarrow -2=-4\,A.\quad \therefore\ A=\frac{1}{2}.\quad x=3\Rightarrow 10=4\,B.\quad \therefore\ B=\frac{5}{2}.$$

したがって，

$$\int \frac{3x+1}{x^2-2x-3}\,dx=\int \frac{\frac{1}{2}}{x+1}+\frac{\frac{5}{2}}{x-3}\,dx=\frac{1}{2}\,\log|x+1|+\frac{5}{2}\,\log|x-3|.$$

例 5.5. $\displaystyle\int \frac{3x+1}{1-x^2}\,dx.$

$1-x^2=(1+x)(1-x)$ より

$$\frac{3x+1}{1-x^2}=\frac{A}{1+x}+\frac{B}{1-x}.$$

両辺に $1-x^2=(1+x)(1-x)$ をかけると,

$$3x+1=A\,(1-x)+B\,(1+x).$$

$$x=-1\Rightarrow -2=2\,A.\quad \therefore\ A=-1.\quad x=1\Rightarrow 4=2\,B.\quad \therefore\ B=2.$$

したがって,

$$\int \frac{3x+1}{1-x^2}\,dx=\int \frac{-1}{1+x}+\frac{2}{1-x}\,dx=\int \frac{-1}{1+x}+\frac{-2\,(1-x)'}{1-x}\,dx$$
$$=-\log|1+x|-2\,\log|1-x|.$$

B $D = 0$ の場合の積分

では, $D = 0$ のときはどうなるのか.

因数分解すると, $x^2 + ax + b = (x - c)^2$ となる.

残念ながら, 次のようにはできない!

$$\frac{px + q}{x^2 + ax + b} = \frac{A}{x - c} + \frac{B}{x - c}.$$

そこで,

$$\frac{px + q}{x^2 + ax + b} = \frac{A}{x - c} + \frac{B}{(x - c)^2}$$

であればなんとかなるだろう (これも部分分数分解).

積分については次のとおりである.

$$\int \frac{1}{x-c}\,dx = \log|x-c|,$$

$$\int \frac{1}{(x-c)^2}\,dx = \int (x-c)^{-2}\,d(x-c) = \frac{1}{-2+1}\,(x-c)^{-2+1}$$

$$= -\frac{1}{x-c}.$$

例 5.6. $\displaystyle\int \frac{2x+1}{x^2-4x+4}\,dx.$

$x^2-4x+4=(x-2)^2$ だから,

$$\begin{aligned}\frac{2x+1}{x^2-4x+4} &= \frac{2\{(x-2)+2\}+1}{(x-2)^2} = \frac{2(x-2)+4+1}{(x-2)^2} \\ &= \frac{2(x-2)+5}{(x-2)^2} = \frac{2}{x-2} + \frac{5}{(x-2)^2}.\end{aligned}$$

したがって,

$$\begin{aligned}\int \frac{2x+1}{x^2-4x+4}\,dx &= \int \frac{2}{x-2} + \frac{5}{(x-2)^2}\,dx \\ = 2\,\log|x-2| + 5 \times -\frac{1}{x-2} &= 2\,\log|x-2| - \frac{5}{x-2}.\end{aligned}$$

なお, 部分分数分解のところは, 次のように進めてもよい.

$$\frac{2x+1}{x^2-4x+4} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{(x-2)^2}.$$

両辺に $x^2-4x+4=(x-2)^2$ をかけると,

$$2x+1 = A\,(x-2)+B.$$

$$x=2 \Rightarrow 5=B. \quad \therefore\ B=5.$$

$$x=1 \Rightarrow 3=-1\,A+B.\ \ 3=-A+5. \quad \therefore\ A=2.$$

C $D < 0$ の場合の積分

一番単純な例が $\dfrac{x+1}{x^2+1}$ である．これは

$$\frac{x+1}{x^2+1} = \frac{x}{x^2+1} + \frac{1}{x^2+1} = \frac{\frac{1}{2}(x^2+1)'}{x^2+1} + \frac{1}{1+x^2}$$

と見てあげれば，

$$\begin{aligned}\int \frac{x+1}{x^2+1}\,dx &= \int \frac{\frac{1}{2}(x^2+1)'}{x^2+1} + \frac{1}{1+x^2}\,dx \\ &= \frac{1}{2}\log(x^2+1) + \tan^{-1} x.\end{aligned}$$

積分して $\log$ になる部分と，$\tan^{-1}$ になる部分とで
分けないといけないのである．

実は, 一般に次の公式が得られる.

$$\int \frac{x-r}{(x-r)^2+s^2}\,dx = \int \frac{\frac{1}{2}\{(x-r)^2+s^2\}'}{(x-r)^2+s^2}\,dx = \frac{1}{2}\log\{(x-r)^2+s^2\},$$

$$\int \frac{1}{(x-r)^2+s^2}\,dx = \int \frac{1}{s^2+(x-r)^2}\,d(x-r) = \frac{1}{s}\tan^{-1}\left(\frac{x-r}{s}\right).$$

例 5.7.

(1) $$\int \frac{3x-6}{x^2-4x+9}\,dx = \int \frac{3x-6}{(x-2)^2+5}\,dx = \int \frac{3(x-2)}{(x-2)^2+5}\,dx$$

$$= \int \frac{\frac{3}{2}\{(x-2)^2+5\}'}{(x-2)^2+5}\,dx = \frac{3}{2}\log\{(x-2)^2+5\}$$

$$= \frac{3}{2}\log(x^2-4x+9).$$

(2) $$\int \frac{5}{x^2-4x+9}\,dx = \int \frac{5}{(x-2)^2+5}\,dx = \int \frac{5}{\sqrt{5}^2+(x-2)^2}\,dx$$

$$= \frac{5}{\sqrt{5}}\tan^{-1}\left(\frac{x-2}{\sqrt{5}}\right) = \sqrt{5}\tan^{-1}\left(\frac{x-2}{\sqrt{5}}\right).$$

次のように変形をすると, 積分して $\log$ になる部分と, $\tan^{-1}$ になる部分とに分けられる.

$$\frac{px+q}{(x-r)^2+s^2}=\frac{p\{(x-r)+r\}+q}{(x-r)^2+s^2}=\frac{p(x-r)+(pr+q)}{(x-r)^2+s^2}$$
$$=\frac{\frac{p}{2}\{(x-r)^2+s^2\}'+(pr+q)}{(x-r)^2+s^2}$$

いっそのこと, $t=x-r$ と置換積分してしまえば, $dt=dx$ であり,

$$\frac{px+q}{(x-r)^2+s^2}=\frac{\widetilde{p}\,t+\widetilde{q}}{t^2+s^2}=\frac{\widetilde{p}\,t}{t^2+s^2}+\frac{\widetilde{q}}{t^2+s^2}=\frac{\frac{\widetilde{p}}{2}(t^2+s^2)'}{t^2+s^2}+\frac{\widetilde{q}}{t^2+s^2}$$

であるから, 計算ミスも減るのではないかと考えられる.

例 5.8. $\displaystyle\int \frac{2x-4}{x^2+2x+10}\,dx$.

$x^2+2x+10=(x+1)^2+9$ より

$$\frac{2x-4}{x^2+2x+10}=\frac{2\{(x+1)-1\}-4}{(x+1)^2+9}=\frac{2(x+1)-2-4}{(x+1)^2+9}=\frac{2(x+1)-6}{(x+1)^2+9}.$$

したがって,

$$\int \frac{2x-4}{x^2+2x+10}\,dx=\int \frac{2(x+1)}{(x+1)^2+9}+\frac{-6}{3^2+(x+1)^2}\,dx$$

$$=\int \frac{\{(x+1)^2+9\}'}{(x+1)^2+9}+\frac{-6}{3^2+(x+1)^2}\,dx$$

$$=\log|\{(x+1)^2+9\}|-6\times\frac{1}{3}\tan^{-1}\left(\frac{x+1}{3}\right)$$

$$=\log(x^2+2x+10)-2\tan^{-1}\left(\frac{x+1}{3}\right).$$

式変形については, $x^2+2x+10=(x+1)^2+9$ より

$$\frac{2x-4}{x^2+2x+10}=\frac{A\,(x+1)}{x^2+2x+10}+\frac{B}{(x+1)^2+9}$$

とみて, 分母が全部同じなので, 分母をはらうと

$$2x-4=A(x+1)+B$$
$$x=-1\Rightarrow -6=B.\ B=-6.\quad x=0\Rightarrow -4=A+B.\ A=2$$

なので,

$$\begin{aligned}\frac{2x-4}{x^2+2x+10}&=\frac{2\,(x+1)}{x^2+2x+10}+\frac{-6}{(x+1)^2+9}\\&=\frac{(x^2+2x+10)'}{x^2+2x+10}+\frac{-6}{(x+1)^2+9}\end{aligned}$$

となる. これから積分を進めてもよい.

置換積分を援用したものは次のとおりである.

$x^2+2x+10=(x+1)^2+9$ より $t=x+1$ と置換すると,
$dt=dx$ であり, $x=t-1$ だから,

$$\int \frac{2x-4}{x^2+2x+10}\,dx=\int \frac{2(t-1)-4}{t^2+9}\,dt=\int \frac{2t-2-4}{t^2+9}\,dt$$
$$=\int \frac{2t}{t^2+9}+\frac{-6}{t^2+9}\,dt=\int \frac{(t^2+9)'}{t^2+9}+\frac{-6}{3^2+t^2}\,dt$$
$$=\log|(t^2+9)|-6\times\frac{1}{3}\tan^{-1}\left(\frac{t}{3}\right)$$
$$=\log(x^2+2x+10)-2\tan^{-1}\left(\frac{x+1}{3}\right).$$

例 5.9. $\displaystyle\int \frac{4x-3}{x^2-3x+3}\,dx.$

分母は実数の範囲で因数分解できないが, $x^2-3x+3=\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$ と平方完成される.

$$\frac{4x-3}{x^2-3x+3}=\frac{A\left(x-\frac{3}{2}\right)}{x^2-3x+3}+\frac{B}{x^2-3x+3}$$

$$4x-3=A\left(x-\frac{3}{2}\right)+B.$$

$$x=\frac{3}{2}\Rightarrow 3=B.\quad\therefore\ B=3.\quad x=0\Rightarrow -3=-\frac{3}{2}A+B.\quad\therefore\ A=4.$$

したがって，

$$\begin{aligned}
\int \frac{4x-3}{x^2-3x+3}\,dx &= \int \frac{4\left(x-\frac{3}{2}\right)}{x^2-3x+3} + \frac{3}{x^2-3x+3}\,dx \\
&= \int \frac{\frac{4}{2}\left(x^2-3x+3\right)'}{x^2-3x+3} + \frac{3}{\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}\,dx \\
&= 2\,\log\left|x^2-3x+3\right| + 3 \times \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\,\tan^{-1}\left(\frac{x-\frac{3}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right) \\
&= 2\,\log(x^2-3x+3) + 2\sqrt{3}\,\tan^{-1}\left(\frac{2x-3}{\sqrt{3}}\right).
\end{aligned}$$

注意

勘違いしやすいところであるが, 分母が $(x-r)^2 - s^2$ となる場合,

$$\frac{px+q}{x^2+ax+b} = \frac{\widetilde{p}\,(x-r)+\widetilde{q}}{(x-r)^2 - s^2}$$

と変形できるが, 積分は $\tan^{-1}$ は全く出てこないので注意しよう. 実際,

$$\int \frac{x-r}{(x-r)^2 - s^2}\,dx = \int \frac{\frac{1}{2}\{(x-r)^2 - s^2\}'}{(x-r)^2 - s^2}\,dx = \frac{1}{2}\log|(x-r)^2 - s^2|,$$

$$\int \frac{1}{(x-r)^2 - s^2}\,dx = \int \frac{1}{(x-r+s)(x-r-s)}\,dx$$

$$= \int \frac{1}{2s}\left(\frac{1}{x-r-s} - \frac{1}{x-r+s}\right)dx$$

$$= \frac{1}{2s}\Bigl(\log|x-r-s| - \log|x-r+s|\Bigr) = \frac{1}{2s}\log\left|\frac{x-r-s}{x-r+s}\right|$$

以上は覚える必要はないが, 勘違いだけは気を付けて!

$$\frac{1}{(x-\alpha)(x-\beta)} = \frac{1}{\alpha-\beta}\Big(\frac{1}{x-\alpha} - \frac{1}{x-\beta}\Big).$$

今回は有理関数の積分として, 分母が 2 次式までの話をやってきたが,
実は 3 次以上でも同じようなことができる.
興味がある人はおまけの方を見てほしい.

ただし, 実際に計算するには分母を因数分解しないといけないため,
非常に計算が大変であるということは注意しておこう.

部分分数分解は分母が 3 次以上でも可能である.

例 5.10. $\dfrac{3x^2+4x+5}{x^3-7x+6}$.

$x^3-7x+6=(x-1)(x-2)(x+3)$ と因数分解できるから,

$$\frac{3x^2+4x+5}{x^3-7x+6}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x+3}.$$

両辺に $x^3-7x+6=(x-1)(x-2)(x+3)$ をかけると

$$3x^2+4x+5=A\,(x-2)(x+3)+B\,(x-1)(x+3)+C\,(x-1)(x-2).$$

$$x=1 \Rightarrow 3+4+5=(-1)\,4\,A.\ \ 12=-4\,A.\quad \therefore\ A=-3.$$
$$x=2 \Rightarrow 12+8+5=1\,5\,B.\ \ 25=5\,B.\quad \therefore\ B=5.$$
$$x=-3 \Rightarrow 27-12+5=(-4)\,(-5)\,C.\ \ 20=20\,C.\quad \therefore\ C=1.$$

したがって,

例 5.11. $\dfrac{5x^2-4x+8}{x^3-3x+2}$.

$x^3-3x+2=(x-1)^2(x+2)$ と因数分解できるから,

$$\frac{5x^2-4x+8}{x^3-3x+2}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{x+2}.$$

両辺に $x^3-3x+2=(x-1)^2(x+2)$ をかけると

$$5x^2-4x+8=A\,(x-1)(x+2)+B\,(x+2)+C\,(x-1)^2.$$

$$x=1\Rightarrow 5-4+8=3\,B.\ \ 9=3\,B.\quad\therefore\ B=3.$$
$$x=-2\Rightarrow 20+8+8=(-3)^2\,C.\ \ 36=9\,C.\quad\therefore\ C=4.$$
$$x=0\Rightarrow 8=(-1)\,2\,A+2\,B+(-1)^2\,C.\ \ 8=-2\,A+6+4.\quad\therefore\ A=1.$$

したがって,

$$\frac{5x^2-4x+8}{x^3-3x+2}=\frac{1}{x-1}+\frac{3}{(x-1)^2}+\frac{4}{x+2}.$$

おまけ 2: 分母が一般次数の場合の積分

まず, 次の理論に注意する. これは, 代数学の基本定理
(n 次方程式は複素数解を必ずもつ) を利用することにより得られる
重要な事実である.

$P(x)$ を係数が実数になっている n 次多項式とする.
このとき, $P(x)$ は次のような形に因数分解できる.

$$C\left\{(x-\alpha_1)^2+\beta_1^2\right\}^{\ell_1}\left\{(x-\alpha_2)^2+\beta_2^2\right\}^{\ell_2}\cdots\left\{(x-\alpha_L)^2+\beta_L^2\right\}^{\ell_L}$$
$$\times(x-\gamma_1)^{m_1}(x-\gamma_2)^{m_2}\cdots(x-\gamma_M)^{m_M}.$$

このとき, 有理関数は必ず部分分数分解できることがいえる.

$f(x)$ は有理関数であって, 分母の次数 $>$ 分子の次数とする.
このとき, $f(x)$ は次のような形に部分分数分解できる.

$$\begin{aligned}
&\frac{A_{11}(x-\alpha_1)+B_{11}}{\{(x-\alpha_1)^2+\beta_1^2\}}+\frac{A_{12}(x-\alpha_1)+B_{12}}{\{(x-\alpha_1)^2+\beta_1^2\}^2}+\cdots \\
&+\frac{A_{1\ell_1}(x-\alpha_1)+B_{1\ell_1}}{\{(x-\alpha_1)^2+\beta_1^2\}^{\ell_1}}+\frac{A_{21}(x-\alpha_2)+B_{21}}{\{(x-\alpha_2)^2+\beta_2^2\}}+\cdots \\
&+\frac{A_{L1}(x-\alpha_L)+B_{21}}{\{(x-\alpha_L)^2+\beta_L^2\}}+\cdots+\frac{A_{L\ell_L}(x-\alpha_L)+B_{L\ell_L}}{\{(x-\alpha_L)^2+\beta_L^2\}^{\ell_L}} \\
&+\frac{C_{11}}{(x-\gamma_1)}+\frac{C_{12}}{(x-\gamma_1)^2}+\cdots+\frac{C_{1m_1}}{(x-\gamma_1)^{m_1}} \\
&+\frac{C_{21}}{(x-\gamma_2)}+\cdots+\frac{C_{M1}}{(x-\gamma_M)}+\cdots+\frac{C_{Mm_M}}{(x-\gamma_M)^{m_M}}
\end{aligned}$$

したがって, あと問題になるのは, 次の積分である.

$$I_m = \int \frac{1}{(x-\gamma)^m}\,dx \qquad J_m = \int \frac{x-\alpha}{\{(x-\alpha)^2+\beta^2\}^m}\,dx$$

$$K_m = \int \frac{1}{\{(x-\alpha)^2+\beta^2\}^m}\,dx$$

I_m は $t = x - \gamma$ と置換することで,

$$I_m = \begin{cases} \log|x-\gamma| & m = 1, \\ -\dfrac{1}{m-1}\dfrac{1}{(x-\gamma)^{m-1}} & m \geqq 2. \end{cases}$$

J_m は $t = (x-\alpha)^2 + \beta^2$ と置換することで,

$$J_m = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\log\{(x-\alpha)^2+\beta^2\} & m = 1, \\ -\dfrac{1}{2\,(m-1)}\dfrac{1}{\{(x-\alpha)^2+\beta^2\}^{m-1}} & m \geqq 2. \end{cases}$$

K_m については，まず $y = x - \alpha$ と置換して，

$$K_m = \int \frac{1}{(y^2+\beta^2)^m}\, dy.$$

部分積分を行うと，

$$\begin{aligned}
K_m &= \int (y)' \frac{1}{(y^2+\beta^2)^m}\, dy = y\,\frac{1}{(y^2+\beta^2)^m} - \int y \left(\frac{1}{(y^2+\beta^2)^m}\right)' dy \\
&= \frac{y}{(y^2+\beta^2)^m} - \int y \left[(-m)\left(y^2+\beta^2\right)^{-m-1} 2y\right] dy \\
&= \frac{y}{(y^2+\beta^2)^m} - \int \frac{-2m\,y^2}{(y^2+\beta^2)^{m+1}}\, dy \\
&= \frac{y}{(y^2+\beta^2)^m} + 2m \int \frac{y^2+\beta^2-\beta^2}{(y^2+\beta^2)^{m+1}}\, dy \\
&= \frac{y}{(y^2+\beta^2)^m} + 2m \int \frac{1}{(y^2+\beta^2)^m} - \frac{\beta^2}{(y^2+\beta^2)^{m+1}}\, dy
\end{aligned}$$

(次ページへ)

K_m (前ページから)

$$= \frac{y}{(y^2+\beta^2)^m} + 2m\left(\int \frac{1}{(y^2+\beta^2)^m}\,dy - \beta^2\int \frac{1}{(y^2+\beta^2)^{m+1}}\,dy\right)$$

$$= \frac{y}{(y^2+\beta^2)^m} + 2m\,(K_m - \beta^2 K_{m+1}).$$

これを K_{m+1} について解けば,

$$K_{m+1} = \frac{1}{2m\,\beta^2}\,\frac{y}{(y^2+\beta^2)^m} + \frac{2m-1}{2m\,\beta^2}\,K_m.$$

以上から,

$$K_m = \begin{cases} \dfrac{1}{\beta}\tan^{-1}\left(\dfrac{x-\alpha}{\beta}\right) & m=1, \\ \dfrac{1}{2(m-1)\,\beta^2}\,\dfrac{x-\alpha}{\{(x-\alpha)^2+\beta^2\}^{m-1}} + \dfrac{2m-3}{2(m-1)\,\beta^2}\,K_{m-1} & m \geqq 2. \end{cases}$$

以上のように, 有理関数の積分は何とかして計算ができることがわかった.
ただし, 実際に計算するにあたっては, 分母を因数分解する必要がある.
したがって, 本当に計算できるケースは限られてくる.

例 5.12.

$$\int \frac{x^2-4x-8}{x^3+1}\,dx.$$

$x^3+1=(x+1)(x^2-x+1)=(x+1)\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}$ となる.

$$\frac{x^2-4x-8}{x^3+1}=\frac{A}{x+1}+\frac{B\left(x-\frac{1}{2}\right)}{x^2-x+1}+\frac{C}{x^2-x+1}.$$

$$x^2-4x-8=A\left(x^2-x+1\right)+B\left(x+1\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)+C\left(x+1\right).$$

$$x=-1\Rightarrow -3=3\,A.\quad \therefore\ A=-1.$$

$$x=\frac{1}{2}\Rightarrow -\frac{39}{4}=\frac{3}{4}A+\frac{3}{2}C.\ \ \frac{3}{2}C=-\frac{39}{4}+\frac{3}{4}=-9.\quad \therefore\ C=-6.$$

$$x=0\Rightarrow -8=A-\frac{1}{2}B+C.\ \ \frac{1}{2}B=-1-6+8=1.\quad \therefore\ B=2.$$

したがって，

$$\int \frac{x^2-4x-8}{x^3+1}\,dx = \int \frac{-1}{x+1} + \frac{2\left(x-\frac{1}{2}\right)}{x^2-x+1} + \frac{-6}{x^2-x+1}\,dx$$

$$= \int \frac{-1}{x+1} + \frac{\frac{2}{2}\left(x^2-x+1\right)'}{x^2-x+1} + \frac{-6}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}\,dx$$

$$= -\log|x+1| + \log|x^2-x+1| - 6 \times \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \tan^{-1}\left(\frac{x-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)$$

$$= -\log|x+1| + \log(x^2-3x+3) + 4\sqrt{3}\,\tan^{-1}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right).$$

例 5.13.

$$\int \frac{2x^3 - 24}{x^4 + 4}\,dx$$

$x^4 + 4 = (x^2+2)^2 - 4x^2 = (x^2 - 2x + 2)(x^2 + 2x + 2)$ だから,
$x^4 + 4 = \left\{\left(x-1\right)^2 + 1\right\}\left\{\left(x+1\right)^2 + 1\right\}$ となる.

$$\frac{2x^3 - 24}{x^4 + 4} = \frac{A\left(x-1\right) + B}{x^2 - 2x + 2} + \frac{C\left(x+1\right) + D}{x^2 + 2x + 2}.$$

$$\begin{aligned} 2x^3 - 24 = {} & \left\{A\left(x-1\right) + B\right\}(x^2 + 2x + 2) \\ & + \left\{C\left(x+1\right) + D\right\}(x^2 - 2x + 2). \end{aligned}$$

$$x = 1 + i \Rightarrow 2(-2 + 2i) - 24 = (i\,A + B)\,(4 + 4i).$$

$$B + A\,i = \frac{-28 + 4i}{4 + 4i} = -3 + 4i. \quad \therefore\ A = 4,\ B = -3.$$

$$x = -1 + i \Rightarrow 2(2 + 2i) - 24 = (i\,C + D)\,(4 - 4i).$$

$$D + C\,i = \frac{-20 + 4i}{4 - 4i} = -3 - 2i. \quad \therefore\ C = -2,\ D = -3.$$

したがって,

$$\int \frac{2x^3-24}{x^4+4}\,dx = \int \frac{4\left(x-1\right)-3}{x^2-2x+2} + \frac{-2\left(x+1\right)-3}{x^2+2x+2}\,dx$$

$$= \int \frac{\frac{4}{2}\left(x^2-2x+2\right)'}{x^2-2x+2} + \frac{-3}{\left(x-2\right)^2+1^2}\,dx$$

$$+ \int \frac{\frac{-2}{2}\left(x^2+2x+2\right)'}{x^2+2x+2} + \frac{-3}{\left(x+1\right)^2+1^2}\,dx$$

$$= 2\,\log\left|x^2-2x+2\right| - 6\times\frac{1}{1}\,\tan^{-1}\left(\frac{x-1}{1}\right)$$

$$- \log\left|x^2+2x+2\right| - 6\times\frac{1}{1}\,\tan^{-1}\left(\frac{x+1}{1}\right)$$

$$= 2\,\log(x^2-2x+2) - \log(x^2+2x+2)$$

$$- 3\,\tan^{-1}(x-1) - 3\,\tan^{-1}(x+1).$$

例 5.14.

$$\int \frac{2x^3 - 6x^2 + 12x}{x^4 + 4x^2 + 4}\, dx.$$

$x^4 + 4x^2 + 4 = (x^2+2)^2$ となる.

$$\frac{2x^3 - 6x^2 + 12x}{x^4 + 4x^2 + 4} = \frac{A\,\boxed{x}}{x^2+2} + \frac{B}{x^2+2} + \frac{C\,\boxed{x}}{(x^2+2)^2}. + \frac{D}{(x^2+2)^2}.$$

$$2x^3 - 6x^2 + 12x = \left(A\,\boxed{x} + B\right)(x^2+2) + C\,\boxed{x} + D.$$

$$x = \sqrt{2}i \Rightarrow 12 + 8\sqrt{2}i = C\sqrt{2}\,i + D. \quad \therefore\ C = 8,\ D = 12.$$

$$x = 0 \Rightarrow 0 = 2\,B + D. \quad \therefore\ B = -6.$$

$$x = 1 \Rightarrow 8 = (A+B) \times 3 + C + D.\ \ 3A = 8 - (-18) - 8 - 12.$$

$$\therefore\ A = 2.$$

したがって,

$$
\begin{aligned}
&\int \frac{2x^3 - 6x^2 + 12x}{x^4 + 4x^2 + 4}\,dx \\
&= \int \frac{2\,x}{x^2+2} + \frac{-6}{x^2+2} + \frac{8\,x}{(x^2+2)^2}. + \frac{12}{(x^2+2)^2}\,dx \\
&= \int \frac{\frac{2}{2}\,d(x^2+2)}{x^2+2} + \int \frac{-6}{x^2+2}\,dx + \int \frac{\frac{8}{2}\,d(x^2+2)}{(x^2+2)^2} + \int \frac{12}{(x^2+2)^2}\,dx.
\end{aligned}
$$

ところで, 4 つ目の積分は

$$
\begin{aligned}
12\,K_2 &= 12 \times \left(\frac{1}{2\,\sqrt{2}^2}\,\frac{x}{x^2+2} + \frac{1}{2\,\sqrt{2}^2}\,K_1 \right) \\
&= \frac{3\,x}{x^2+2} + 3 \times \frac{1}{\sqrt{2}}\tan^{-1}\frac{x}{\sqrt{2}}.
\end{aligned}
$$

以上から，

$$
\begin{aligned}
&\int \frac{2x^3 - 6x^2 + 12x}{x^4 + 4x^2 + 4}\,dx \\
&= \log|x^2 + 2| - 6 \times \frac{1}{\sqrt{2}} \tan^{-1} \frac{x}{\sqrt{2}} \\
&+ 4 \times -\frac{1}{x^2 + 2} + \frac{3\,x}{x^2 + 2} + \frac{3}{\sqrt{2}} \tan^{-1} \frac{x}{\sqrt{2}} \\
&= \log(x^2 + 2) + \frac{3x - 4}{x^2 + 2} - \frac{3}{\sqrt{2}} \tan^{-1} \frac{x}{\sqrt{2}}.
\end{aligned}
$$

例 5.15.

$$\int \frac{x^3+25x+10}{x^4-2x^2+1}\,dx$$

$x^4-2x^2+1=(x^2-1)^2=(x-1)^2(x+1)^2$ となる.

$$\frac{x^3+25x+10}{x^4-2x^2+1}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{x+1}.+\frac{D}{(x+1)^2}.$$

$$x^3+25x+10=\left\{A\,(x-1)+B\right\}(x+1)^2+\left\{C\,(x+1)+D\right\}(x-1)^2.$$

$$x=1\Rightarrow 36=4B.\quad\therefore\ B=9.$$

$$x=-1\Rightarrow -16=4D.\quad\therefore\ D=-4.$$

$$x=0\Rightarrow 10=-A+B+C+D.\quad -A+C=10-9+4=5.$$

$$x=-2\Rightarrow -8-50+10=-3A+B-9C+9D.$$

$$-3A-9C=-48-9+36=-21.\ \ A+3C=7.$$

$$\therefore\ A=-2,\ C=3.$$

したがって，

$$
\begin{aligned}
&\int \frac{x^3+25x+10}{x^4-2x^2+1}\,dx = \int \frac{-2}{x-1} + \frac{9}{(x-1)^2} + \frac{3}{x+1}. + \frac{-4}{(x+1)^2}\,dx \\
&= -2\ \log|x-1| + 9 \times -\frac{1}{x-1} + 3\ \log|x+1| - 4 \times -\frac{1}{x+1} \\
&= -2\ \log|x-1| - \frac{9}{x-1} + 3\ \log|x+1| + \frac{4}{x+1}.
\end{aligned}
$$