

微分積分 2(積分) 自習スライド (Part 9)

置換積分 (定積分)

鈴木 敏行

神奈川大学

2023 年 03 月 01 日

※ 転載や再配布を禁止する.

<http://t21suzuki.html.xdomain.jp/>

置換積分が必要な定積分の計算を考える.

もちろん, 不定積分を求めてから計算してもよい.

一応, 定積分の場合の置換積分法についてまとめておこう.

$f(x)$ は $a \leq x \leq b$ で連続な関数,

$g(t)$ は $g(\alpha) = a, g(\beta) = b$ であり, $\alpha \leq t \leq \beta$ (または $\beta \leq t \leq \alpha$) で C^1 級な関数とする.

このとき,

$$\int_a^b f(x) \, dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(g(t)) \, g'(t) \, dt.$$

置き換える部分が微分も含めて連続であることを確認しておこう

しかし、置き換えた文字を元の文字に置き換えるのが面倒である。
そこで、変数が変わったら、範囲も変わるということで、上端や下端を変えて計算してしまおう。

定積分の置換積分は、次の流れで行う。不定積分と変わった部分を
緑枠で書き表す。

Step 1 (HARD) 何を何とおくのか決定する。(変更なし)

Step 2 微分する。(変更なし)

Step 2.5 上端・下端の対応をまとめる。(New!)

$$\begin{array}{c|cc} & t = g(x) & \\ x & a & b \\ \hline t & g(a) & g(b) \end{array} \quad \text{または} \quad \begin{array}{c|cc} & x = h(t) & \\ x & a & b \\ \hline t & \alpha & \beta \end{array}$$

表にしてまとめておくとよい。

Step 3 x の積分にある x の式を以上で出てきた関係式を用いて t の式に書き換える. (ここまで変更なし)

ただし, 上・下端については,

- dx のときは, x の対応
- dt のときは, t の対応

となるよう適宜変更すること.

Step 4 x が完全に消え, t だけの式になったのを確認して, t で積分する.
(変更なし)

t での積分は定積分なので, この段階で答えが出る.

Step 5 (必要なし)

例 9.1. $\int_0^2 x e^{x^2} dx$.

$x^2 = t$ とおく. $2x dx = dt$. 不定積分を求めると,

$$\int x e^{x^2} dx = \int x e^t \frac{1}{2x} dt = \int \frac{1}{2} e^t dt = \frac{1}{2} e^t = \frac{1}{2} e^{x^2}.$$

したがって, 求める定積分は,

$$\int_0^2 x e^{x^2} dx = \left[\frac{1}{2} e^{x^2} \right]_0^2 = \frac{e^4 - 1}{2}.$$

別解.

$x^2 = t$ とおく. $2x dx = dt$. $x = 0$ のとき $t = 0$, $x = 2$ のとき $t = 4$ だから

$$\int_0^2 x e^{x^2} dx = \int_0^4 x e^t \frac{1}{2x} dt = \frac{1}{2} \int_0^4 e^t dt = \left[\frac{1}{2} e^t \right]_0^4 = \frac{e^4 - 1}{2}.$$

定積分の場合、置換積分を行うと上端・下端も変わる。
 その代わり、不定積分とは異なり、 x の式に戻す作業は不要になる。

上端・下端を変更するタイミングは dx が dt に変わった段階である。
 上端・下端の対応を調べ、表にして整理することをおススメする。

例 9.2. $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{\cos^3 x} dx.$

$\cos x = t$ とおく. $-\sin x dx = dt.$

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{\cos^3 x} dx &= \int_1^{\frac{1}{2}} \frac{\sin x}{t^3} \frac{1}{-\sin x} dt = \int_1^{\frac{1}{2}} -t^{-3} dt \\ &= \left[-\frac{1}{-2} t^{-2} \right]_1^{\frac{1}{2}} = \frac{4}{2} - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

x	t
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}$
$\vdots$	$\vdots$
0	1

もう少し例を見ておこう。

例 9.3. $\int_0^3 x \sqrt{x^2 + 3} dx.$

$t = x^2 + 3$ とおく. $dt = 2x dx.$

$$\begin{aligned} \int_0^3 x \sqrt{x^2 + 3} dx &= \int_3^{12} x \sqrt{t} \frac{1}{2x} dt = \int_3^{12} \frac{1}{2} t^{\frac{1}{2}} dt \\ &= \left[\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} \right]_3^{12} = \frac{1}{3} 12^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3} 3^{\frac{3}{2}} \\ &= \frac{12\sqrt{12} - 3\sqrt{3}}{3} = \frac{21\sqrt{3}}{3} = 7\sqrt{3}. \end{aligned}$$

x	t
3	12
$\vdots$	$\vdots$
0	3

$t = \sqrt{x^2 + 3}$ とおく. $t^2 = x^2 + 3$, $2t dt = 2x dx$.

$$\begin{aligned}\int_0^3 x \sqrt{x^2 + 3} dx &= \int_{\sqrt{3}}^{2\sqrt{3}} x t \frac{2t}{2x} dt = \int_{\sqrt{3}}^{2\sqrt{3}} t^2 dt \\&= \left[\frac{1}{3} t^3 \right]_{\sqrt{3}}^{2\sqrt{3}} = \frac{1}{3} (2\sqrt{3})^3 - \frac{1}{3} (\sqrt{3})^3 \\&= \frac{24\sqrt{12} - 3\sqrt{3}}{3} = \frac{21\sqrt{3}}{3} = 7\sqrt{3}.\end{aligned}$$

x	t
3	$2\sqrt{3}$
$\vdots$	$\vdots$
0	$\sqrt{3}$

例 9.4. $\int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{4-x^2}} dx.$

$t = \sqrt{4-x^2}$ とおく. $t^2 = 4 - x^2$, $2t dt = -2x dx$.

$$\int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{4-x^2}} dx = \int_2^{\sqrt{3}} \frac{x^3}{t} \frac{2t}{-2x} dt = \int_2^{\sqrt{3}} -x^2 dt$$

また x が残っているからまだ積分できない!

$$t^2 = 4 - x^2 \Rightarrow -x^2 = t^2 - 4$$

$$= \int_2^{\sqrt{3}} (t^2 - 4) dt = \left[\frac{1}{3} t^3 - 4t \right]_2^{\sqrt{3}}$$

$$= \left(\frac{1}{3} (\sqrt{3})^3 - 4\sqrt{3} \right) - \left(\frac{8}{3} - 8 \right)$$

$$= \sqrt{3} - 4\sqrt{3} - \frac{8}{3} + 8 = \frac{16}{3} - 3\sqrt{3}.$$

x	t
1	$\sqrt{3}$
$\vdots$	$\vdots$
0	2

上端・下端については、置き換える関数の連続性に注意すること。
したがって、範囲にも注意が必要になる。

例 9.5. $\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx.$

$x = \sin t$ とおく. $dx = \cos t dt$. $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ では

$$\sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\sin^2 t} = \sqrt{\cos^2 t} = \cos t.$$

x	t
1	$\frac{\pi}{2}$
$\vdots$	$\vdots$
0	0

したがって,

$$\begin{aligned} \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \cos t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2t}{2} dt \\ &= \left[\frac{1}{2}t + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \sin 2t \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

$\sin \frac{5\pi}{2} = 1$ より t の範囲を $0 \leq t \leq \frac{5\pi}{2}$ することは問題ない.

しかし, $\sqrt{\cos^2 t} = |\cos t|$ となり, 積分範囲の分割が必要.

$$\begin{aligned} & \int_0^{\frac{5\pi}{2}} |\cos t| \cos t \, dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (+\cos t) \cos t \, dt + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} (-\cos t) \cos t \, dt + \int_{\frac{3\pi}{2}}^{\frac{5\pi}{2}} (+\cos t) \cos t \, dt. \end{aligned}$$

これを計算しても, ちゃんと $\frac{\pi}{4}$ が得られる.

例 9.6. $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx.$

これはもちろん置換積分を用いず

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx = \left[\tan^{-1} x \right]_0^1 = \tan^{-1} 1 - \tan^{-1} 0 = \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4}.$$

高校のときにもやった、置換積分を用いる方法は次の通り.

$x = \tan \theta \left(0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4} \right)$ とおく. $dx = \frac{1}{\cos^2 \theta} d\theta.$

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+\tan^2 \theta} \frac{1}{\cos^2 \theta} d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} 1 d\theta \\ &= \left[\theta \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4}. \quad \text{※ } 1 + \tan^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta}. \end{aligned}$$

x	θ
1	$\frac{\pi}{4}$
$\vdots$	$\vdots$
0	0

この積分の範囲を, いくら $\tan \frac{5}{4}\pi = 1$ だからといって

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx = \int_0^{\frac{5\pi}{4}} \frac{1}{1+\tan^2 \theta} \frac{1}{\cos^2 \theta} d\theta$$

と計算してはいけない. これは $\theta = \frac{\pi}{2}$ で $\tan \theta$ が発散しており, 連続ですらないからである.