

微分積分 2(積分) 自習スライド (Part 11)

広義積分

鈴木 敏行

神奈川大学

2023 年 03 月 01 日

※ 転載や再配布を禁止する.

<http://t21suzuki.html.xdomain.jp/>

今回は、積分のまとめとして、広義積分を考えてみる。
これまでの積分の計算のルールは以下のとおりだった。

$f(x)$ が $a \leq x \leq b$ で連続であるとき、 $f(x)$ の不定積分 (= 原始関数) $F(x)$ は存在する。これを用いて

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) = \left[F(x) \right]_a^b.$$

この量は、 $y = f(x)$ のグラフと、 $x = a$ 、 $x = b$ 、 x 軸とで囲まれた部分の面積に相当する。

青字の部分の仮定がダメになった場合はどうなってしまうのだろうか。

定積分の定義によると、別に関数が連続でなくても問題はない。

実際、(広義) 単調増加もしくは (広義) 単調減少な関数は積分可能である。

ここでは、次の2つのパターンに絞って話を考えることにする.

A: $f(x)$ は $a < x \leq b$ で連続だが, $x = a$ で無限大に発散している.

例:
$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$$

B: $f(x)$ は $a \leq x$ で連続. $b = \infty$ になってしまっている.

例:
$$\int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$$

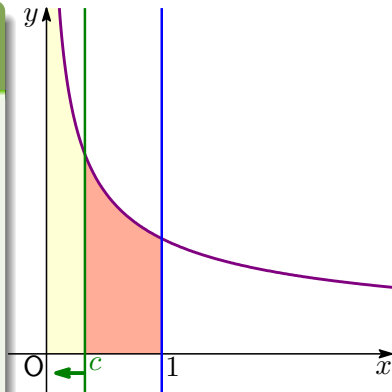
$f(x)$ が $a < x \leq b$ で連続だが, $x = a$ で発散する場合.

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{c \rightarrow a+0} \int_c^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x) dx.$$

例 11.1. $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$.

$\lim_{x \rightarrow +0} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$ に注意する.

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx &= \lim_{c \rightarrow +0} \int_c^1 x^{-\frac{1}{2}} dx \\ &= \lim_{c \rightarrow +0} \left[\frac{2}{1} x^{\frac{1}{2}} \right]_c^1 \\ &= \lim_{c \rightarrow +0} (2 - 2\sqrt{c}) = 2. \end{aligned}$$



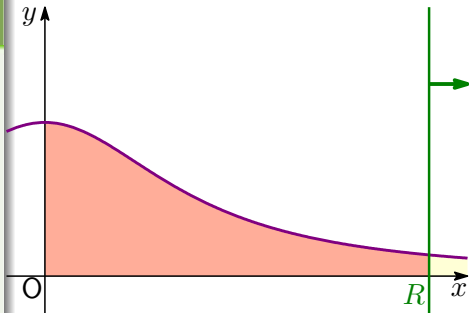
$a \leq x$ で連続だが, $b = \infty$ になってしまっている.

$$\int_a^{\infty} f(x) dx = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_a^R f(x) dx.$$

例 11.2. $\int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx.$

積分範囲が $0 \leq x < \infty$ と無限に広がっている.

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx &= \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_0^R \frac{dx}{x^2+1} \\ &= \lim_{R \rightarrow +\infty} \left[\tan^{-1} x \right]_0^R \\ &= \lim_{R \rightarrow +\infty} (\tan^{-1} R - \tan^{-1} 0) = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$



いずれにしても, 広義積分と呼ばれるものは

定積分 + 極限値の計算

で計算ができるということである.

同様に次も考えられる.

A' $f(x)$ が $a \leq x < b$ で連続だが, $x = b$ で発散する場合.

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{c \rightarrow b-0} \int_a^c f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx.$$

B' $x \leq b$ で連続だが, $a = -\infty$ になっている.

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{R \rightarrow -\infty} \int_R^b f(x) dx = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^b f(x) dx.$$

例 11.3. $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx.$

$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ は $x=1$ で発散している.

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx &= \lim_{c \rightarrow 1-0} \int_0^c \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \lim_{c \rightarrow 1-0} \left[\sin^{-1} x \right]_0^c \\ &= \lim_{c \rightarrow 1-0} \left(\sin^{-1} c - \sin^{-1} 0 \right) = \lim_{c \rightarrow 1-0} \sin^{-1} c = \sin^{-1} 1 = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

例 11.4. $\int_{-\infty}^0 e^{2x} dx.$

積分範囲が $-\infty < x \leq 0$ と無限に広がっている.

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^0 e^{2x} dx &= \lim_{R \rightarrow -\infty} \int_R^0 e^{2x} dx = \lim_{R \rightarrow -\infty} \left[\frac{1}{2} e^{2x} \right]_R^0 \\ &= \lim_{R \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{2} e^0 - \frac{1}{2} e^{2R} \right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \times 0 = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

$\int_{-1}^1 \frac{1}{x} dx$ は存在しない.

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{x} dx = \left[\log |x| \right]_{-1}^1 = \log 1 - \log 1 = 0$$

や 奇関数だから 0 はダメである.

$\frac{1}{x}$ は $x = 0$ で定義できない (発散している) ので

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{x} dx = \int_{-1}^0 \frac{1}{x} dx + \int_0^1 \frac{1}{x} dx$$

と分ける必要がある.

ところで,

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{1}{x} dx &= \lim_{c \rightarrow +0} \int_c^1 \frac{1}{x} dx = \lim_{c \rightarrow +0} \left[\log |x| \right]_c^1 \\ &= \lim_{c \rightarrow +0} (\log 1 - \log c) = +\infty.\end{aligned}$$

ゆえに, 元の積分は $(-\infty) + (+\infty)$ という不定形で, 極限值は確定せず, 広義積分 $\int_{-1}^1 \frac{1}{x} dx$ は振動である.

先程の計算を正当化する**コーシーの主値**がある.

$a \leq x \leq b$ の途中で発散する $x = c$ があるとき

$$\text{p.v.} \int_a^b f(x) dx = \lim_{h \rightarrow +0} \left(\int_a^{c-h} f(x) dx + \int_{c+h}^b f(x) dx \right),$$

例えば, $\text{p.v.} \int_{-1}^1 \frac{1}{x} dx = 0$ である.

※ **主値があるから広義積分が存在するわけではない.**

次の場合のコーシーの主値積分もある.

$$\text{p.v.} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R f(x) dx.$$

不定積分の上端・下端での極限值が確定するときは, これまでの定積分のような感覚で計算してよい.

このことに注意すれば, 置換積分や部分積分が混ざった複雑な広義積分も簡単に計算できる.

$\frac{1}{\infty} = 0$, $e^{-\infty} = 0$, $\tan^{-1} \infty = \frac{\pi}{2}$ と考えてよい.

したがって, 先述の 2 例は以下のように解ける.

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \left[\frac{2}{1} x^{\frac{1}{2}} \right]_0^1 = 2.$$
$$\int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \left[\tan^{-1} x \right]_0^{\infty} = \frac{\pi}{2}.$$

以上のように広義積分を計算するとき、次の極限值はよく出てくる。

$$\lim_{x \rightarrow +0} x^a \log x = 0 \quad (a > 0),$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^a} = 0 \quad (a > 0),$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^b e^{-x} = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \tan^{-1} x = \frac{\pi}{2}.$$

ところで、 $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x} \sin x = 0$ であるが、これを形式的に $e^{-\infty} \sin \infty = 0$ と書いてはいけない。

これは $\lim_{x \rightarrow \infty} \sin x$ が振動し、確定しないからである。

例 11.5. $\int_0^{\infty} \frac{6}{x^2 + 4x + 3} dx.$

分母が $(x+1)(x+3)$ と因数分解できる.

$$\frac{6}{x^2 + 4x + 3} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+3}. \quad 6 = A(x+3) + B(x+1).$$

これより, $A = 3, B = -3$. ゆえに,

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{6}{x^2 + 4x + 3} dx &= \int_0^{\infty} \frac{3}{x+1} + \frac{-3}{x+3} dx \\ &= \left[3 \log |x+1| - 3 \log |x+3| \right]_0^{\infty} \\ &= \left[3 \log \left| \frac{x+1}{x+3} \right| \right]_0^{\infty} = 3 \log 1 - 3 \log \frac{1}{3} = 3 \log 3. \end{aligned}$$

例 11.6. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}} dx.$

$t = \sin x$ とおく. $dt = \cos x dx$ より $dx = \frac{1}{\cos x} dt$ だから

x	$0 \cdots \frac{\pi}{2}$
t	$0 \cdots 1$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}} dx = \int_0^1 \frac{\cos x}{\sqrt{t}} \frac{1}{\cos x} dt = \int_0^1 t^{-\frac{1}{2}} dt = \left[\frac{2}{1} t^{\frac{1}{2}} \right]_0^1 = 2 - 0 = 2.$$

精密にやるのであれば,

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}} dx &= \lim_{c \rightarrow +0} \int_c^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}} dx = \lim_{c \rightarrow +0} \int_{\sin c}^1 \frac{\cos x}{\sqrt{t}} \frac{1}{\cos x} dt \\ &= \lim_{c \rightarrow +0} \int_{\sin c}^1 t^{-\frac{1}{2}} dt = \lim_{c \rightarrow +0} \left[\frac{2}{1} t^{\frac{1}{2}} \right]_{\sin c}^1 \\ &= \lim_{c \rightarrow +0} \left(2 - 2 (\sin c)^{\frac{1}{2}} \right) = 2 - 2 \times 0 = 2. \end{aligned}$$

例 11.7. $\int_0^1 \log x \, dx$.

$$\begin{aligned}\int_0^1 \log x \, dx &= \int_0^1 (x)' \log x \, dx = \left[x \log x \right]_0^1 - \int_0^1 x (\log x)' \, dx \\ &= (0 - 0) - \int_0^1 x \times \frac{1}{x} \, dx = - \int_0^1 1 \, dx = - \left[x \right]_0^1 = -(1 - 0) = -1.\end{aligned}$$

精密にやるのであれば,

$$\begin{aligned}\int_0^1 \log x \, dx &= \lim_{c \rightarrow +0} \int_c^1 (x)' \log x \, dx \\ &= \lim_{c \rightarrow +0} \left\{ \left[x \log x \right]_c^1 - \int_c^1 x (\log x)' \, dx \right\} \\ &= \lim_{c \rightarrow +0} \left\{ (0 - c \log c) - \int_c^1 x \times \frac{1}{x} \, dx \right\} \\ &= -0 - \lim_{c \rightarrow +0} \int_c^1 1 \, dx = - \lim_{c \rightarrow +0} \left[x \right]_c^1 = - \lim_{c \rightarrow +0} (1 - c) = -1.\end{aligned}$$

例 11.8. $\int_0^{\infty} e^{-2x} \sin x \, dx$.

$e^{(-2+i)x} = e^{-2x} e^{ix} = e^{-2x} (\cos x + i \sin x)$ だから, 求める計算は $\int_0^{\infty} e^{(-2+i)x} \, dx$ の虚部である.

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} e^{(-2+i)x} \, dx &= \left[\frac{1}{-2+i} e^{(-2+i)x} \right]_0^{\infty} = 0 - \frac{1}{-2+i} e^0 \\ &= -\frac{(-2-i)}{(-2+i)(-2-i)} = -\frac{(-2-i)}{(-2)^2 - i^2} = -\frac{-2-i}{5} = \frac{2}{5} + \frac{1}{5}i \end{aligned}$$

この虚部が求める広義積分の値だから, $\int_0^{\infty} e^{-2x} \sin x \, dx = \frac{1}{5}$.

次の広義積分は数学以外にも多方面で応用される。
値の求め方は難しいのでここでは省略する。

ガウス積分 $\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$

ディリクレ積分 $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$

フレネル積分 $\int_0^{\infty} \sin x^2 dx = \int_0^{\infty} \cos x^2 dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$

ガウス積分は、確率・統計において重要な正規分布に関わっている。

X が平均 m , 標準偏差 σ に従う正規分布の確率変数とすると,

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma^2} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx.$$

おまけ 1: 広義積分の収束判定法

広義積分が (計算ができなくても) 収束するのかを調べる機会もある.

$g_1(x) \leq f(x) \leq g_2(x) \ (a < x < b)$ とする.
(※ $a = -\infty$ でも $b = +\infty$ でもよい)

(1) $g_1(x), g_2(x)$ の広義積分 $\int_a^b g_k(x) dx \ (k = 1, 2)$ が収束するならば,
 $f(x)$ の広義積分 $\int_a^b f(x) dx$ も収束する.

(2) $g_1(x)$ の広義積分が正の無限大に発散するならば, $f(x)$ の広義積分も正の無限大に発散する.

(3) $g_2(x)$ の広義積分が負の無限大に発散するならば, $f(x)$ の広義積分も負の無限大に発散する.

$g_1(x)$, $g_2(x)$ がすぐに思いつかない場合は, 次の極限值を用いた判定法を利用する.

$f(x)$ は $a < x < b$ で連続であるとする.

$$\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) (x - a)^\alpha, \quad \lim_{x \rightarrow b-0} f(x) (b - x)^\beta,$$

が収束するとする.

(1) $\alpha < 1$, $\beta < 1$ であれば, 広義積分 $\int_a^b f(x) dx$ は収束する.

(2) $\alpha \geq 1$ または $\beta \geq 1$ であって, その極限值は 0 でないとする.

• $f(x) \geq 0$ ($a < x < b$) であれば, 広義積分 $\int_a^b f(x) dx$ は $+\infty$ であり, 発散する.

• $f(x) \leq 0$ ($a < x < b$) であれば, 広義積分 $\int_a^b f(x) dx$ は $-\infty$ であり, 発散する.

$f(x)$ は $a \leq x < +\infty$ で連続であるとする.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) x^\gamma$ が収束するとする.

(1) $\gamma > 1$ であれば, 広義積分 $\int_a^\infty f(x) dx$ は収束する.

(2) $\gamma \leq 1$ であって, その極限值は 0 でないとする.

• $f(x) \geq 0$ ($x \geq a$) であれば, 広義積分 $\int_a^\infty f(x) dx$ は $+\infty$ であり, 発散する.

• $f(x) \leq 0$ ($x \geq a$) であれば, 広義積分 $\int_a^b f(x) dx$ は $-\infty$ であり, 発散する.

おまけ 2: 広義積分で定まる関数

広義積分で決まる次の関数も重要である.

$$\Gamma(s) = \int_0^{\infty} x^{s-1} e^{-x} dx \quad (\text{ガンマ関数}),$$

$$B(p, q) = \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx \quad (\text{ベータ関数}).$$

ガンマ関数は階乗の一般化である.

$$\Gamma(s+1) = s \Gamma(s) \quad (s > 0), \quad \Gamma(n+1) = n! \quad (n \text{ は } 0 \text{ 以上の整数}).$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

また, これら 2 つの関数に対しては次の性質がある.

$$B(q, p) = B(p, q) = \frac{\Gamma(p) \Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} \quad (p > 0, q > 0),$$

$$\Gamma(s) \Gamma(1-s) = \frac{\pi}{\sin(\pi s)} \quad (0 < s < 1) \quad \text{相反公式 (相補公式)}.$$

また, $x = \sin^2 \theta$ と置換することによって,

$$B(p, q) = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin \theta)^{2p-1} (\cos \theta)^{2q-1} d\theta.$$

例 11.9. $\Gamma(5)$ と $\frac{\Gamma(\frac{4}{3})}{\Gamma(\frac{10}{3})}$

$$\Gamma(5) = (5-1)! = 4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24.$$

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma(\frac{4}{3})}{\Gamma(\frac{10}{3})} &= \frac{\Gamma(\frac{4}{3})}{\Gamma(\frac{7}{3} + 1)} = \frac{\Gamma(\frac{4}{3})}{\frac{7}{3}\Gamma(\frac{7}{3})} = \frac{\Gamma(\frac{4}{3})}{\frac{7}{3}\Gamma(\frac{4}{3} + 1)} = \frac{\Gamma(\frac{4}{3})}{\frac{7}{3} \cdot \frac{4}{3}\Gamma(\frac{4}{3})} \\ &= \frac{1}{\frac{7}{3} \times \frac{4}{3}} = \frac{3 \times 3}{7 \times 4} = \frac{9}{28}. \end{aligned}$$

例 11.10. $B(2, 4)$ と $B\left(\frac{3}{2}, \frac{7}{2}\right)$

$$B(2, 4) = \frac{\Gamma(2) \Gamma(4)}{\Gamma(2+4)} = \frac{(2-1)! (4-1)!}{(6-1)!} = \frac{1 \times 3 \times 2 \times 1}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = \frac{1}{20}.$$

$$\begin{aligned} B\left(\frac{3}{2}, \frac{7}{2}\right) &= \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \Gamma\left(\frac{7}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{2} + \frac{7}{2}\right)} = \frac{\frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \frac{5}{2} \times \frac{3}{2} \times \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{(5-1)!} \\ &= \frac{1 \times 5 \times 3 \times 1}{2 \times 2 \times 2 \times 2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^2 \times \frac{1}{24} = \frac{5}{128} \pi. \end{aligned}$$

さて、おまけ 1 でも触れた通り、

$$\lim_{x \rightarrow +0} f(x) x^\alpha = \lim_{x \rightarrow +0} x^{s+\alpha-1} e^{-x} = 0 \quad (s + \alpha - 1 > 0)$$

だから、広義積分 $\int_0^1 x^{s-1} e^{-x} dx$ は $1 - s = \alpha < 1$, すなわち $s > 0$ のとき収束する. また、ロピタルの定理を使うなどすれば、適当な $\gamma > 1$ に対して

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) x^\gamma = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{s+\gamma-1} e^{-x} = 0$$

($s + \gamma - 1$ が整数になるようにすればよい) だから、広義積分 $\int_1^\infty x^{s-1} e^{-x} dx$ は $s > 0$ のとき収束する.

以上から、ガンマ関数は $s > 0$ において値が確定する.

同様に、ベータ関数も $p > 0, q > 0$ のときに広義積分が収束し、値が確定する.