微分積分 3(偏微分) 自習スライド (Part 1)
2 変数関数と極限値

鈴木 敏行

神奈川大学

2023 年 03 月 02 日

http://t21suzuki.html.xdomain.jp/

2 変数関数

1 変数関数 $y = f(x)$ は

1 つのデータ x を入れれば, 1 つのデータ y を出してくれる仕組み

を表していた. 2 変数関数 $z = f(x, y)$ は

1 組のデータ (x, y) を入れれば, 1 つのデータ z を出してくれる仕組み

を表す.

例 1.1.

(1) $z = xy$ は 2 変数関数である.
(2) ある時刻における, 世界各地の気温を 1 つの関数で表そうとすれば, 世界各地は緯度と経度を用いて場所を表せるので, 2 変数関数とみなせる.

関数に入れるデータの組 (x, y) として選べるものを**定義域**という.
2 変数関数の定義域は xy 座標平面上の図形として表せる.

2 変数関数 $z = f(x, y)$ を視覚的に扱いやすくすると,
曲面になることに注意しよう.

1 変数関数の微分・積分と状況が異なるが, 2 変数関数のことがわかれば
3 変数関数のことは計算が大変なだけで理屈は同じである.

1 変数関数の極限値

1 変数関数と 2 変数関数の大きな違いは, 極限値を考えるとよくわかる.
さて $\lim_{x \to a} f(x) = \alpha$ について考える.

ちゃんとした定義

すべての $\varepsilon > 0$ に対して, 次を満たす $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ がある.

$$0 < |x - a| < \delta \ \Rightarrow \ |f(x) - \alpha| < \varepsilon.$$

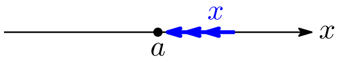
理解する上では

x が a に近づくとき, $f(x)$ は限りなく α に近づく.

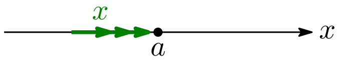
x が a に近いのと $f(x)$ が α に近いのとでは, 後者の方が重要である.
$f(x)$ を α により近くするためには, (必要におおじて)x は a に近くないとダメ, ということを数式化したものがちゃんとした定義になっている.

2 変数関数の極限のとき, (x,y) が (a,b) に近づくというところが重要になってくる. 近づくとは (x,y) と (a,b) との距離がだんだん縮まることを表している. したがって, $\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}$ をどんどん 0 に縮めていけばいい, と解釈できる.

近さについてはいいのだが, 近づくときの動きに注目しよう.
1 変数関数の極限において, x が a に近づく近づき方は
大きく分けて 2 つ しかなかった.

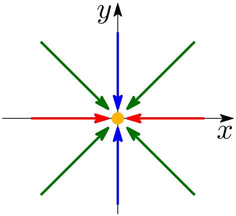


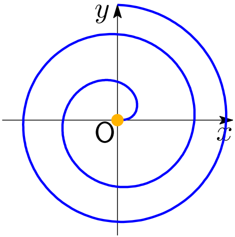
右から近づくから
右極限



左から近づくから
左極限

それに対し, (x,y) が (a,b) に近づく方法は **無数** ある.





このような事情があるから, $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = \alpha$ は

(x,y) が (a,b) にどのように近づいても,
$f(x,y)$ は限りなく共通の α に近づく

という説明になってしまう.

近づく方向は意識した方がよいのである.

ちなみに, ちゃんとした定義は次の通りになる.

ちゃんとした定義

すべての $\varepsilon > 0$ に対して, 次を満たす $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ がある.

$$0 < \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \delta \ \Rightarrow \ |f(x,y) - \alpha| < \varepsilon.$$

(a,b) の近くには, いろんな方向に (a,b) に近い (x,y) があるよ, ということに注意する.

ここで, 図形的には $\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \delta$ というのは

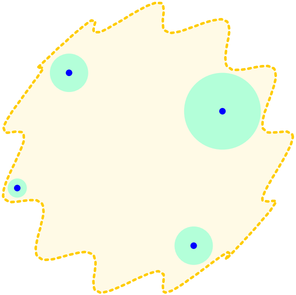
中心 (a,b), 半径 δ の円盤の中身 (境界は含まない).

これを (a,b) の開球ということがある.

平面図形 A が開集合であるというのは,

すべての点に対し, 十分小さな開球が完全に A に含まれてしまうもの

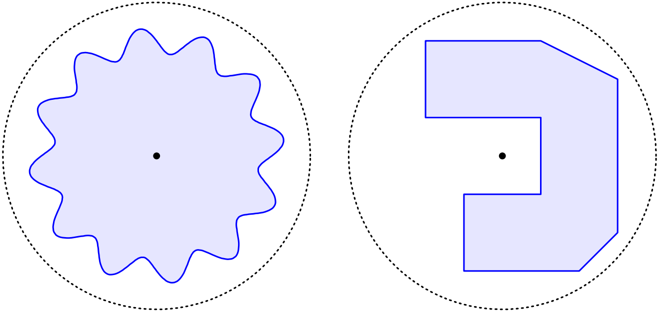
をいう. 境界を含まない図形が開集合であるというイメージで差し支えない.



(a, b) を含む開集合を (a, b) の近傍という.
(a, b) の近傍から (a, b) だけをくりぬいた集合も開集合になるのだが,
これを (a, b) の除外近傍という.

開集合をくりぬいた残りの部分を閉集合という.
境界の無い図形をくりぬいた後だから, 境界はくっついている.
したがって, 境界をすべて含む図形が閉集合であるというイメージで差し支えない.

また, 充分大きな開球の中に平面図形 A が含まれてしまうとき, A を 有界 という.



以上の説明は

有界閉集合 (閉区間の 2 次元以上への一般化)

という図形を説明するうえでは必要不可欠である.
数直線において
- 開球は開区間 $(a-\delta, a+\delta)$ を表している.
- 開区間 (a, b) は開集合であり, 閉区間 $[a, b]$ は閉集合である.
- 実数からなる集合 A に対し, $A \subset (-R, R)$ となる $R > 0$ があれば, A は有界ということになる.

ここからは, 具体的な 2 変数関数の極限値を考える.

例 1.2. $\displaystyle \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ を考える.

(1) $y=x$ に沿って (x,y) を $(0,0)$ に近づけると:

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=x}} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2-x^2}{x^2+x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{0}{2\,x^2} = 0.$$

(2) $y=-2x$ に沿って (x,y) を $(0,0)$ に近づけると:

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=-2x}} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2-(-2x)^2}{x^2+(-2x)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{-3\,x^2}{5\,x^2} = -\frac{3}{5}.$$

(3) $y = mx$ に沿って (x, y) を $(0, 0)$ に近づけると:

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=mx}} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 - (m\,x)^2}{x^2 + (m\,x)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{(1 - m^2)\,x^2}{(1 + m^2)\,x^2} = \frac{1 - m^2}{1 + m^2}.$$

m ごとに異なる値に近づくことに注意.
(x, y) を $(0, 0)$ に近づける方法によって, 近づく値が異なるので, 極限値は存在しない!

1 変数関数でいえば, 右極限と左極限が一致しないから収束しない, ということである.

以上の例題に対し，解答を書くのであれば次の通りである．

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}.$$

$y = mx$ に沿って (x, y) を $(0, 0)$ に近づけると，

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=mx}} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 - (m\,x)^2}{x^2 + (m\,x)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{(1 - m^2)\,x^2}{(1 + m^2)\,x^2} = \frac{1 - m^2}{1 + m^2}.$$

これは m ごとに異なる値に近づいていることを表している．
$(0, 0)$ への近づけ方によって，近づく値が異なるので，極限値は存在しない．

ちなみに, 先ほどの例は不定形だったからこそ, 慎重に話を進めていたわけだが, 不定形でないのであれば, 1 変数関数の極限値と同じように計算してかまわない.

注意

2 変数関数の極限値の計算に対して, ロピタルの定理のような定理は存在しない.

例 1.3. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \sqrt{x^2+y^2}$.

不定形ではないし，ルートの中は多項式であるから，

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{0^2+0^2} = 0.$$

例 1.4. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(2,2)} \frac{x^2-y^2}{x-y}$.

不定形だが，因数分解と約分により多項式になる．

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\to(2,2)} \frac{x^2-y^2}{x-y} &= \lim_{(x,y)\to(2,2)} \frac{(x+y)(x-y)}{x-y} = \lim_{(x,y)\to(2,2)} (x+y) \\ &= 2+2 = 4.\end{aligned}$$

$y = mx$ では歯が立たない場合もあるので注意しよう.

例 1.5. $\displaystyle \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^4+y^2}$.

$y = mx^2$ に沿って $(0,0)$ に近づけてみると,

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=mx^2}} \frac{x^2y}{x^4+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2\,(mx^2)}{x^4+(mx^2)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{m\,x^4}{x^4+m^2\,x^4}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{m\,x^4}{(1+m^2)\,x^4} = \frac{m}{1+m^2}.$$

これは m ごとに異なる値に近づいていることを表している.
$(0,0)$ への近づけ方によって, 近づく値が異なるので,
極限値は存在しない.

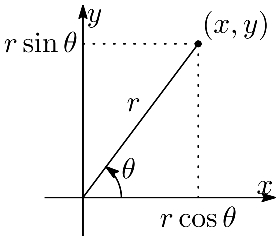
今度は, 不定形のうち, 極限値がある場合について扱う.

話を簡単にするために, $(0,0)$ に近づく場合を考えよう.
(x,y) が $(0,0)$ に近づくということは, 模式的に書くと

$$\sqrt{x^2+y^2} \to 0$$

である. ただし, 方向が無数ある点には注意が必要である.

距離と方向とを分けて考えるのに都合がいい，極座標を紹介しよう．



$$x = r\ \cos\theta,$$
$$y = r\ \sin\theta,$$
$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \geqq 0,$$
$$\cos\theta = \frac{x}{r},\ \sin\theta = \frac{y}{r}.$$

$(x, y) \to (0, 0)$ は θ がどう変化しようが関係なく $r \to +0$ と同じであることに注意する．

はさみうちの原理

極限値の計算に有効なものの 1 つとして，はさみうちの原理があった．
1 変数関数の場合は次の通りであった．

$f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ は ($x = a$ を除く)$x = a$ の近くで $f(x) \leqq h(x) \leqq g(x)$ とする．更に，

$$\lim_{x \to a} f(x) = A, \quad \lim_{x \to a} g(x) = A.$$

このとき，$\lim_{x \to a} h(x)$ は確定し，その極限値は A になる．

前回と同じく, 2 変数関数の極限値も同じように考えられる.

$f(x,y)$, $g(x,y)$, $h(x,y)$ は (a,b) のとある除外近傍で

$$f(x,y) \leqq h(x,y) \leqq g(x,y)$$

とする. 更に,

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = A, \qquad \lim_{(x,y)\to(a,b)} g(x,y) = A.$$

このとき, $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(a,b)} h(x,y)$ は確定し, その極限値は A になる.

極限値が求められる, だけでなく, そもそも極限値が確定するという点は注意してほしい.

以上の事実を利用して, 不定形の極限値を考えてみよう.

例 1.6. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^2}$ を求める.

(1) $y = mx$ に沿って (x, y) を $(0, 0)$ に近づけると:

$$\begin{aligned}\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=mx}} \frac{xy^2}{x^2+y^2} &= \lim_{x\to 0} \frac{x\,(mx)^2}{x^2+(mx)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{m^2\,x^3}{x^2\,(1+m^2)} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{m^2}{1+m^2}\,x = 0.\end{aligned}$$

極限値は 0 のように思える. ただし, 以上の計算をしただけでは極限値が 0 であることを示したことにならない.

(2) $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ $(r > 0)$ とすると,

$$\frac{xy^2}{x^2+y^2} = \frac{r\,\cos\theta\,(r\,\sin\theta)^2}{(r\,\cos\theta)^2+(r\,\sin\theta)^2} = \frac{r^3\,\cos\theta\,\sin^2\theta}{r^2\,(\cos^2\theta+\sin^2\theta)} = r\,\cos\theta\,\sin^2\theta.$$

$-1 \leqq \cos\theta \leqq 1$, $-1 \leqq \sin\theta \leqq 1$ だから $-1 \leqq \cos\theta\ \sin^2\theta \leqq 1$ である.

なお, 実際には $-\dfrac{2\sqrt{3}}{9} \leqq \cos\theta\ \sin^2\theta \leqq \dfrac{2\sqrt{3}}{9}$ であるが,

ここまで精密にやりすぎる必要はない.

したがって,

$$-\sqrt{x^2+y^2} = -r \leqq \frac{xy^2}{x^2+y^2} = r\ \cos\theta\ \sin^2\theta \leqq r = \sqrt{x^2+y^2}.$$

ここで,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} -\sqrt{x^2+y^2} = 0, \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \sqrt{x^2+y^2} = 0.$$

したがって, はさみうちの原理より

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^2} = 0.$$

ちなみに, 先ほどの例は極座標を利用しなくても,

$$-\frac{1}{2}(x^2+y^2) \leqq xy \leqq \frac{1}{2}(x^2+y^2)$$

を利用すれば, もう少しシンプルになる.

まず,

$$-\frac{1}{2}|y| = \frac{-|y|\,\frac{1}{2}(x^2+y^2)}{x^2+y^2} \leqq \frac{xy^2}{x^2+y^2} \leqq \frac{|y|\,\frac{1}{2}(x^2+y^2)}{x^2+y^2} = \frac{1}{2}|y|$$

であり,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} -\frac{1}{2}|y| = 0, \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1}{2}|y| = 0.$$

したがって, はさみうちの原理より

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^2} = 0.$$

$(x, y) \to (0, 0)$ の近づけ方としてぐるぐる回りながら近づくケースを考えると, θ には r の影響が残っているということに注意する.
そのため, 何も説明なしに

$$\lim_{r \to +0} r \cos\theta \sin^2\theta = 0$$

としてはいけないのである.
これは $\displaystyle\lim_{n \to \infty} \frac{\sin n}{n} = 0$ をいうのに

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0 \text{ だから } \lim_{n \to \infty} \frac{\sin n}{n} = 0$$

とやってしまうのが正しくないということと同様なケースである.
結果があっていても, 途中経過としては正しくない.

$\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^2}$.

$x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ $(r > 0)$ とすると,

$$\frac{xy^2}{x^2+y^2} = \frac{r\ \cos\theta\,(r\ \sin\theta)^2}{(r\ \cos\theta)^2 + (r\ \sin\theta)^2} = \frac{r^3\ \cos\theta\ \sin^2\theta}{r^2\,(\cos^2\theta + \sin^2\theta)} = r\ \cos\theta\ \sin^2\theta.$$

$-1 \leqq \cos\theta \leqq 1$, $-1 \leqq \sin\theta \leqq 1$ だから $-1 \leqq \cos\theta\ \sin^2\theta \leqq 1$. これより,

$$-\sqrt{x^2+y^2} = -r \leqq \frac{xy^2}{x^2+y^2} = r\ \cos\theta\ \sin^2\theta \leqq r = \sqrt{x^2+y^2}.$$

ここで,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} -\sqrt{x^2+y^2} = 0, \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \sqrt{x^2+y^2} = 0.$$

したがって, はさみうちの原理より $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^2} = 0.$

ちなみにいつでも極座標が使えるとは限らないので注意しよう.

例 1.7. $\displaystyle \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^4+y^2}$.

まず, 次に注意する.

$$-|x|\,(x^4+y^2) \leqq -|x|\,y^2 \leqq xy^2 \leqq |x|\,y^2 \leqq |x|\,(x^4+y^2).$$

したがって,

$$-|x| \leqq \frac{xy^2}{x^4+y^2} \leqq |x|. \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} -|x| = 0, \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} |x| = 0.$$

はさみうちの原理から $\displaystyle \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^4+y^2} = 0.$

察しがついている人も多いだろうが, 1 変数関数と 2 変数関数の極限値が近づく方向が 2 つから無限に増えたという点で大きく変わっている.

実は 1 変数関数の微分・積分と, 2 変数以上の微分・積分の大きな違いは, この極限値のところに由来するところが大きいのである.

もちろん, 区間だけ考えればよかった 1 変数関数とは違い, 関数の定義域が平面図形になるので, 大変になるというのは言うまでもないが.

連続関数

$f(x,y)$ が (a,b) で連続であるとは

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = f(a,b)$$

- (a,b) で定義されていて
- (a,b) に近づけたときの極限値が存在し
- その 2 つが一致している

という 3 条件がすべて成立しているものである.

連続関数に関する性質は, 1 変数関数のと同じであることに注意する.

最大値や最小値について, 1 変数関数の場合は次の通りであった.

最大値定理 (1 変数)

$f(x)$ は $a \leqq x \leqq b$ で連続であるとする.
このとき, 最小値と最大値が存在する.

閉区間 $[a, b]$ を 2 変数 (平面上の図形) では有界閉集合というものに置き換えられる (用語は前回紹介済み).

最大値定理 (2 変数)

$f(x, y)$ は有界閉集合 A 上で連続であるとする.
このとき, 最小値と最大値が存在する.

2 変数関数の極限値が高度なものであったことから,
連続であるという条件がより強い条件に思えるのではないだろうか.

例 1.8.

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

は $(0,0)$ では連続ではない.

理由 極限値が存在しない!

$y = mx$ に沿って $(0,0)$ に近づけてみると,

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=mx}} \frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x\,(mx)}{x^2+(mx)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{m\,x^2}{x^2+m^2\,x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{m\,x^2}{(1+m^2)\,x^2} = \frac{m}{1+m^2}.$$

これは m ごとに異なる値に近づいていることを表している.
$(0,0)$ への近づけ方によって, 近づく値が異なるので,
極限値は存在しない.

なお, $y = 0$ に沿って $(x, y) \to (0, 0)$ とすれば,

$$f(x, 0) = \frac{x \times 0}{x^2 + 0^2} = \frac{0}{x^2} = 0. \qquad \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0) \\ y=0}} \frac{xy}{x^2 + y^2} = 0.$$

また, $x = 0$ に沿って $(x, y) \to (0, 0)$ とすれば,

$$f(0, y) = \frac{0 \times y}{0^2 + y^2} = \frac{0}{y^2} = 0. \qquad \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0) \\ x=0}} \frac{xy}{x^2 + y^2} = 0.$$

この事実は次回以降重要になっていくので, よく復習しておくこと.