微分積分 3(偏微分) 自習スライド (Part 7)

2 変数関数の極大・極小

鈴木 敏行

神奈川大学

2023 年 03 月 02 日

http://t21suzuki.html.xdomain.jp/

2 変数関数の極大・極小を調べる方法を考えよう.

極大や極小の定義は 1 変数関数のと同様である.

(1) $f(x,y)$ が (a,b) で極大であるとは, 次を満たす (a,b) の除外近傍 A があることである:

$$(x,y) \in A \ \Rightarrow \ f(x,y) < f(a,b).$$

(a,b) で極大であるとき, (a,b) を極大点, $f(a,b)$ を極大値という.

(2) $f(x,y)$ が (a,b) で極小であるとは, 次を満たす (a,b) の除外近傍 A があることである:

$$(x,y) \in A \ \Rightarrow \ f(x,y) > f(a,b).$$

(a,b) で極小であるとき, (a,b) を極小点, $f(a,b)$ を極小値という.

広義の極大・極小は考えないことにする.

極大点というのは, そこまで行くのに増加 (上り), そこから離れると減少 (下り) するような点である.

極小点というのは, そこまで行くのに減少 (下り), そこから離れると増加 (上り) するような点である.

というわけで 1 変数関数をまねして増減表を書きたいところだが,
書くのは難しい. これは, 表が 3 次元になり, 大変ということが大きい.
また, 微分して 0 になるところが y または x ごとに変わっていくので,
書けたとしても扱いづらい.

2 変数関数のまま扱うのは大変なので, 1 変数関数にして考えよう.

$f(x,y)$ を C^1 級としよう.

もし, (a,b) で極大 (もしくは極小) であるのであれば,

$$z(t)=f(a+t\,h,b+t\,k),\quad (h,k)\neq(0,0)$$

は $t=0$ で極大 (もしくは極小) であるといえる. $z'(t)$ を求めると,

$$z'(t)=f_x(a+t\,h,b+t\,k)\,h+f_y(a+t\,h,b+t\,k)\,k.$$

微分ができて, 極大 (もしくは極小) であるのならば, 微分の値は 0 である.

$$\therefore\ 0=f_x(a,b)\,h+f_y(a,b)\,k.$$

これが (h,k) によらず 0 になるわけだから, $f_x(a,b)=0$, $f_y(a,b)=0$ である.

$f_x(a,b)=0,\ f_y(a,b)=0$ となる (a,b) を**停留点**という.

$f(x,y)$ が C^1 級で, (a,b) で極大 (もしくは極小) であるならば, (a,b) は停留点である.

停留点が極値をとる点の候補であるわけである.

1 変数関数の場合, 2 階導関数を用いることで, 極大や極小の判定をすることができた.

2 階導関数による極値判定法

$f(x)$ は C^2 級の関数 ($f''(x)$ が連続) とする.
(1) $f'(a) = 0,\ f''(a) > 0$ ならば $f(x)$ は $x = a$ で極小.
(2) $f'(a) = 0,\ f''(a) < 0$ ならば $f(x)$ は $x = a$ で極大.

$f(x, y)$ を C^2 級としよう.
$z(t) = f(a + h\,t, b + k\,t)$ も C^2 級なので, 上述の判定法が使える.

$z''(t)$ を求めると,

$$\begin{aligned} z''(t) = f_{xx}(a + t\,h, b + t\,k)\,h^2 + 2\,f_{xy}(a + t\,h, b + t\,k)\,hk \\ + f_{yy}(a + t\,h, b + t\,k)\,k^2. \end{aligned}$$

判定に使うのは $z''(0)$ の符号である.

$$z''(0) = f_{xx}(a, b)\,h^2 + 2\,f_{xy}(a, b)\,hk + f_{yy}(a, b)\,k^2.$$

さて, $D(x,y) = A\,x^2 + 2\,B\,xy + C\,y^2$ $((x,y) \neq (0,0))$ について

$$\begin{aligned} D(x,y) &= A\,x^2 + 2\,B\,xy + C\,y^2 = A\left(x^2 + 2\,\frac{B\,y}{A}\,x\right) + C\,y^2 \\ &= A\left(x + \frac{B\,y}{A}\right)^2 - A \times \frac{B^2\,y^2}{A^2} + C\,y^2 \\ &= A\left(x + \frac{B\,y}{A}\right)^2 + \frac{A\,C - B^2}{A}\,y^2. \end{aligned}$$

$\boxed{1}$ $A > 0$, $\dfrac{A\,C - B^2}{A} > 0$ のとき, つまり, $A > 0$, $A\,C - B^2 > 0$ のとき,
$\cdots$ は $+$, $\cdots$ は $+$ だから $D(x,y) > 0$.

$\boxed{2}$ $A < 0$, $\dfrac{A\,C - B^2}{A} < 0$ のとき, つまり, $A < 0$, $A\,C - B^2 > 0$ のとき,
$\cdots$ は $-$, $\cdots$ は $-$ だから $D(x,y) < 0$.

$\boxed{3}$ 一方, $A\,C - B^2 < 0$ のとき,
$\cdots$ は $+/-$, $\cdots$ は $-/+$ だから $D(x,y)$ の符号は一定ではない.

$A = f_{xx}(a,b)$, $B = f_{xy}(a,b)$, $C = f_{yy}(a,b)$, $(x,y) = (h,k)$ とすれば,..

$\boxed{1}$ $f_{xx}(a,b) > 0$, $f_{xx}(a,b)\, f_{yy}(a,b) - f_{xy}(a,b)^2 > 0$ のとき,
どんな $(h,k) \neq (0,0)$ に対しても $z''(0) > 0$ だから, 極小.

$\boxed{2}$ $f_{xx}(a,b) < 0$, $f_{xx}(a,b)\, f_{yy}(a,b) - f_{xy}(a,b)^2 > 0$ のとき,
どんな $(h,k) \neq (0,0)$ に対しても $z''(0) < 0$ だから, 極大.

$\boxed{3}$ $f_{xx}(a,b)\, f_{yy}(a,b) - f_{xy}(a,b)^2 < 0$ のとき,
ある $(h,k) \neq (0,0)$ に対して $z''(0) > 0$,
別の $(h,k) \neq (0,0)$ に対して $z''(0) < 0$ であるから,
極大・極小どちらでもない.

ここで, $\boxed{3}$のような点を鞍点という.

さて，

$$f_{xx}(a,b)\,f_{yy}(a,b)-f_{xy}(a,b)^2=\begin{vmatrix} f_{xx}(a,b) & f_{xy}(a,b) \\ f_{yx}(a,b) & f_{yy}(a,b) \end{vmatrix}=H_f(a,b)$$

をヘッシアン (Hessian) という．実は，これのもとになってる行列の性質を調べればよいというのが一般論として知られている．詳しくは固有値の話になる．

2 変数関数の極値判定法

$f(x,y)$ は C^2 級とする．(a,b) を停留点とするとき，

(1) $f_{xx}(a,b)>0$, $H_f(a,b)>0$ ならば，(a,b) で極小．

(2) $f_{xx}(a,b)<0$, $H_f(a,b)>0$ ならば，(a,b) で極大．

(3) $H_f(a,b)<0$ ならば，(a,b) で極値をとらない (鞍点)．

ただし，

$$H_f(a,b)=\begin{vmatrix} f_{xx}(a,b) & f_{xy}(a,b) \\ f_{yx}(a,b) & f_{yy}(a,b) \end{vmatrix}.$$

先述の説明はイメージが湧く点では問題ないが，正確さに欠け，証明したことにはならないので，しっかりとした証明をしておこう．

極値判定法の証明

まず, $f(x,y)$ が C^2 級だから, (a,b) のある近傍 (開球) 上では
$f_{xx}(x,y)$ の符号と $f_{xx}(a,b)$ の符号は同じであり,
$H_f(x,y)$ の符号と $H_f(a,b)$ の符号は同じ.

さて, $f(x,y)$ に対し, テイラーの定理を用いると,

$$\begin{aligned} f(x,y) &= f(a,b) + f_x(a,b)\,(x-a) + f_y(a,b)\,(y-b) \\ &+ \frac{1}{2}\,[f_{xx}(\widetilde{a},\widetilde{b})\,(x-a)^2 + 2\,f_{xy}(\widetilde{a},\widetilde{b})\,(x-a)(y-b) + f_{yy}(\widetilde{a},\widetilde{b})\,(y-b)^2]. \end{aligned}$$

$(\widetilde{a},\widetilde{b})$ は (a,b) と (x,y) の線分上の点とする.

(a,b) は停留点であったから, $f_x(a,b)=0$, $f_y(a,b)=0$ である.

平方完成をすれば, $f_{xx}(\widetilde{a},\widetilde{b}) \neq 0$ のとき

$$\begin{aligned} f(x,y) &= f(a,b) \\ &+ \frac{1}{2} f_{xx}(\widetilde{a},\widetilde{b}) \left((x-a) + \frac{f_{xy}(\widetilde{a},\widetilde{b})}{f_{xx}(\widetilde{a},\widetilde{b})} (y-b) \right)^2 + \frac{H_f(\widetilde{a},\widetilde{b})}{2\, f_{xx}(\widetilde{a},\widetilde{b})} (y-b)^2. \end{aligned}$$

(1) $f_{xx}(a,b) > 0$, $H_f(a,b) > 0$ のとき, $f_{xx}(\widetilde{a},\widetilde{b}) > 0$, $H_f(\widetilde{a},\widetilde{b}) > 0$ となるから, $f(x,y) > f(a,b)$ ((x,y) は (a,b) の除外近傍上).

(2) $f_{xx}(a,b) < 0$, $H_f(a,b) > 0$ のとき, $f_{xx}(\widetilde{a},\widetilde{b}) < 0$, $H_f(\widetilde{a},\widetilde{b}) > 0$ となるから, $f(x,y) < f(a,b)$ ((x,y) は (a,b) の除外近傍上).

(3) $H_f(a,b) < 0$ のとき, $H_f(\widetilde{a},\widetilde{b}) < 0$ となるから, $f(x,y) > f(a,b)$ になったり $f(x,y) < f(a,b)$ になったりする.

(3) は $f_{xx}(\widetilde{a},\widetilde{b})=0$ であってもいえる.

$$
\begin{aligned}
&f(x,y)=f(a,b)\\
&+\begin{cases}
\dfrac{H_f(\widetilde{a},\widetilde{b})}{2\,f_{yy}(\widetilde{a},\widetilde{b})}\,(x-a)^2+\dfrac{1}{2}\,f_{yy}(\widetilde{a},\widetilde{b})\left(\dfrac{f_{xy}(\widetilde{a},\widetilde{b})}{f_{yy}(\widetilde{a},\widetilde{b})}\,(x-a)+(y-b)\right)^2.\\
f_{xy}(\widetilde{a},\widetilde{b})\,(x-a)(y-b).
\end{cases}
\end{aligned}
$$

$H_f(a,b)<0$ のとき, $H_f(\widetilde{a},\widetilde{b})<0$.

以上で極値判定法の導出ができたので, 実際に使ってみよう.

例 7.1. $f(x,y) = x^2 - xy + y^2 + 2x - 10y$ の極値を求める.

$f(x,y)$ は C^2 級なので, 判定法が使える.

まず, 停留点を求める. $f_x = 2x - y + 2$, $f_y = -x + 2y - 10$ なので,
$f_x = 0$, $f_y = 0$ を連立させて解けば,

$$\begin{array}{rr} & 2x - \ \ y + \ \ 2 = 0 \\ +) & -2x + 4y - 20 = 0 \\ \hline & 3y - 18 = 0. \end{array} \qquad \therefore\ y = 6. \qquad 2x - 6 + 2 = 0. \qquad \therefore\ x = 2.$$

停留点は $(2,6)$ のみである.

判定法を使うために, 2 次偏導関数を求める. $f_{xx} = 2$, $f_{xy} = -1$, $f_{yy} = 2$
なので,

$$H_f(2,6) = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \times 2 - (-1) \times (-1) = 3 > 0. \quad f_{xx}(2,6) = 2 > 0.$$

したがって, $(2,6)$ で極小になることが分かる.

値を求めると,

$$f(2,6) = 2^2 - 2 \times 6 + 6^2 + 2 \times 2 - 10 \times 6$$
$$= 4 - 12 + 36 + 4 - 60 = -28.$$

答え: $(2,6)$ のとき極小値 -28.

2 次関数なので, 極小値は最小値に, 極大値は最大値になっている点に注意する.

さて, $f(x,y)$ は 2 次式なので, 平方完成で解くことも可能である.

$$
\begin{aligned}
f(x,y) &= x^2 - xy + y^2 + 2x - 10y = x^2 + (-y+2)x + y^2 - 10y \\
&= \left(x + \frac{-y+2}{2}\right)^2 - \frac{(-y+2)^2}{4} + y^2 - 10y \\
&= \left(x + \frac{-y+2}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}\,y^2 + y - 1 + y^2 - 10y \\
&= \left(x + \frac{-y+2}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\,y^2 - 9\,y - 1 \\
&= \left(x + \frac{-y+2}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\,(y^2 - 12\,y) - 1 \\
&= \left(x + \frac{-y+2}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\,(y-6)^2 - \frac{3}{4} \times 6^2 - 1 \\
&= \left(x + \frac{-y+2}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\,(y-6)^2 - 28.
\end{aligned}
$$

したがって $x + \dfrac{-y+2}{2} = 0$ かつ $y - 6 = 0$ のとき，つまり $(x,y) = (2,6)$ のとき最小になり，その最小値は -28 である．

例 7.2. $f(x,y) = xy(6-x-y)$ の極値を求める.

まず停留点を求める. $f(x,y) = 6xy - x^2y - xy^2$ であるから,

$$f_x = 6y - 2xy - y^2 = y(6-2x-y), \quad f_y = 6x - x^2 - 2xy = x(6-x-2y).$$

したがって, 次の 4 つの連立方程式を解く必要がある.

$$\begin{cases} y = 0, \\ x = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} y = 0, \\ 6 - x - 2y = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} 6 - 2x - y = 0, \\ x = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} 6 - 2x - y = 0, \\ 6 - x - 2y = 0. \end{cases}$$

それぞれ解くと, $(x,y) = (0,0)$, $(6,0)$, $(0,6)$, $(2,2)$. これが停留点である.

次に判定を行う.

$$f_{xx} = -2y, \quad f_{xy} = 6 - 2x - 2y, \quad f_{yy} = -2x.$$

(1) $(0,0)$ のとき,

$$H_f(0,0) = \begin{vmatrix} 0 & 6 \\ 6 & 0 \end{vmatrix} = 0 \times 0 - 6 \times 6 = -36 < 0.$$

したがって, 鞍点である.
(2) $(6,0)$ のとき,

$$H_f(6,0) = \begin{vmatrix} 0 & -6 \\ -6 & -12 \end{vmatrix} = 0 \times (-12) - (-6) \times (-6) = -36 < 0.$$

したがって, 鞍点である.
(3) $(0,6)$ のとき,

$$H_f(0,6) = \begin{vmatrix} -12 & -6 \\ -6 & 0 \end{vmatrix} = (-12) \times 0 - (-6) \times (-6) = -36 < 0.$$

したがって, 鞍点である.

(4) $(2,2)$ のとき,

$$H_f(2,2) = \begin{vmatrix} -4 & -2 \\ -2 & -4 \end{vmatrix} = (-4)\times(-4) - (-2)\times(-2) = 12 > 0.$$

$$f_{xx}(2,2) = -4 < 0.$$

したがって, 極大点である. $f(2,2) = 2\times 2\times(6-2-2) = 8$ である.

以上から, $(2,2)$ のとき極大値 8.

ちなみに, この例は

各辺の長さの和が 24 となるような直方体の体積が最大になる場合を求めなさい

という問題を解いていたことになる. 縦 x, 横 y, 高さ z とすれば

$$4x + 4y + 4z = 24. \quad \therefore\ x + y + z = 6.$$

$z = 6 - x - y$ なので, 体積は $xy(6 - x - y) = f(x, y)$.

例 7.3. $f(x,y) = xy + \dfrac{2}{x} + \dfrac{4}{y}$ の極値を求める.

まず停留点を求める.

$$f_x = y - \frac{2}{x^2} = \frac{x^2y-2}{x^2}, \quad f_y = x - \frac{4}{y^2} = \frac{xy^2-4}{y^2}.$$

したがって, $x^2y = 2$, $xy^2 = 4$ を連立させて解く. $y = \dfrac{2}{x^2}$ だから

$$x \times \left(\frac{2}{x^2}\right)^2 = 4. \quad \frac{4}{x^3} = 4. \quad \therefore\ x = 1.$$

このとき, $y = \dfrac{2}{1^2} = 2$. 停留点は $(1,2)$ である.

次に判定を行う.

$$f_{xx} = \frac{4}{x^3}, \quad f_{xy} = 1, \quad f_{yy} = \frac{8}{y^3}.$$

$(1,2)$ のとき,

$$H_f(1,2) = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 4 \times 1 - 1 \times 1 = 3 > 0.$$
$$f_{xx}(1,2) = 4 > 0.$$

したがって, 極小点である. $f(1,2) = 1 \times 2 + \dfrac{2}{1} + \dfrac{4}{2} = 6$ である.

以上から, $(1,2)$ のとき極小値 6.

例 7.4. $f(x,y) = 2x^3 - 6xy + 3y^2 - 12y$ の極値を求める.

まず停留点を求める.

$$f_x = 6x^2 - 6y, \quad f_y = -6x + 6y - 12.$$

したがって, $6x^2 - 6y = 0$, $-6x + 6y - 12 = 0$ を連立させて解く. $y = x^2$ だから

$$-x + x^2 - 2 = 0. \quad (x-2)(x+1) = 0. \quad \therefore\ x = 2,\ -1.$$

これより, 停留点は $(2,4)$, $(-1,1)$ である.

次に判定を行う.

$$f_{xx} = 12x, \quad f_{xy} = -6, \quad f_{yy} = 6.$$

(1) $(2,4)$ のとき,

$$H_f(2,4) = \begin{vmatrix} 24 & -6 \\ -6 & 6 \end{vmatrix} = 24 \times 6 - (-6) \times (-6) = 108 > 0,$$

$$f_{xx}(2,4) = 24 > 0.$$

したがって, 極小点である.
$f(2,4) = 2 \times 2^3 - 6 \times 2 \times 4 + 3 \times 4^2 - 12 \times 4 = -32$ である.
(2) $(-1,1)$ のとき,

$$H_f(-1,1) = \begin{vmatrix} -12 & -6 \\ -6 & 6 \end{vmatrix} = (-12) \times 6 - (-6) \times (-6) = -108 < 0.$$

したがって, 鞍点である.

以上から, $(2,4)$ のとき極小値 -32.

極値問題: 3 変数以上は

ちなみに, 3 変数関数の場合の極値判定は次のようになる.

まず,

$$f_x(a,b,c)=0,\quad f_y(a,b,c)=0,\quad f_z(a,b,c)=0$$

を満たす (a,b,c) を $f(x,y,z)$ の**停留点**という.

また, 判定に使うものとして次を考える.

$$H_f^1(a,b,c)=\begin{vmatrix} f_{xx}(a,b,c) & f_{xy}(a,b,c) \\ f_{yx}(a,b,c) & f_{yy}(a,b,c) \end{vmatrix},$$

$$H_f(a,b,c)=\begin{vmatrix} f_{xx}(a,b,c) & f_{xy}(a,b,c) & f_{xz}(a,b,c) \\ f_{yx}(a,b,c) & f_{yy}(a,b,c) & f_{yz}(a,b,c) \\ f_{zx}(a,b,c) & f_{zy}(a,b,c) & f_{zz}(a,b,c) \end{vmatrix}.$$

3 変数関数の極値判定法

$f(x,y,z)$ は C^2 級とする. (a,b,c) を停留点とするとき,
(1) $f_{xx}(a,b,c)>0$, $H_f^1(a,b,c)>0$, $H_f(a,b,c)>0$ ならば, (a,b,c) で極小.
(2) $f_{xx}(a,b,c)<0$, $H_f^1(a,b,c)>0$, $H_f(a,b,c)<0$ ならば, (a,b,c) で極大.
(3) 上記以外で $H_f(a,b,c)\neq 0$ ならば, (a,b,c) で極値をとらない (鞍点).

上記の判定は, 実は次の行列の固有値が, (1) の場合に 3 つとも正, (2) の場合に 3 つとも負, (3) の場合に正と負の両方ある, というところから得られる判定法である.

$$\begin{pmatrix} f_{xx}(a,b,c) & f_{xy}(a,b,c) & f_{xz}(a,b,c) \\ f_{yx}(a,b,c) & f_{yy}(a,b,c) & f_{yz}(a,b,c) \\ f_{zx}(a,b,c) & f_{zy}(a,b,c) & f_{zz}(a,b,c) \end{pmatrix}.$$

この固有値を利用する考え方であれば, 変数がもっと増えても同じように考えられる.