

微分積分 4(重積分) 自習スライド (Part 8)

広義重積分 1—基本と計算

鈴木 敏行

神奈川大学

2023 年 03 月 02 日

※ 転載や再配布を禁止する.

<http://t21suzuki.html.xdomain.jp/>

定積分で扱った広義積分は

(A) $f(x)$ が $a < x \leq b$ で連続だが, $x = a$ で発散する場合

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{c \rightarrow +0} \int_c^1 x^{-\frac{1}{2}} dx = \lim_{c \rightarrow +0} \left[\frac{2}{1} x^{\frac{1}{2}} \right]_c^1 = \lim_{c \rightarrow +0} (2 - 2\sqrt{c}) = 2.$$

(B) $a \leq x$ で連続だが, $b = \infty$ である場合

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{1}{1+x^2} dx &= \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_0^R \frac{1}{x^2+1} dx = \lim_{R \rightarrow +\infty} \left[\tan^{-1} x \right]_0^R \\ &= \lim_{R \rightarrow +\infty} (\tan^{-1} R - \tan^{-1} 0) = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

広義積分 = 定積分 + 極限値の計算

これを2重積分に対しても考えられる.

ここでは, 代表的な 2 つのパターンに絞って考えよう.

(A) $f(x, y)$ が D の一部で発散する場合 (それ以外の点では連続)

$$\iint_D \frac{1}{x+y} dx dy, \quad D : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1.$$

(B) $f(x, y)$ が D で連続だが無限に広がっている場合

$$\iint_D \frac{1}{(x+y)^3} dx dy, \quad D : x \geq 1, y \geq 1.$$

厳密には次を満たす有界閉集合の列 $\{S_n\}$ のことである.

(1) S_n は面積確定な図形

(2) $S_n \subset S_{n+1}$

(3) $\bigcup_{n=1}^{\infty} S_n = D$

(4) すべての D に含まれる有界閉集合 A に対し,
 $A \subset S_n$ となる番号 n がある.

※ D が開集合であれば, $A \subset D$ ということである.

イメージはどんどん膨らんで, 最終的に D になってくれるものである.

例 8.1. 数直線の場合

(1) $D = (0, 1]$ のとき, $S_n = [\frac{1}{n}, 1]$.

(2) $D = [0, \infty)$ のとき, $S_n = [0, n]$.

結局区間の両端がどうなるかだけを考えればよかったので、定積分の広義積分は、単純に極限値の計算でよかったわけである。

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x) dx &= \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{a_n}^c f(x) dx + \lim_{n \rightarrow \infty} \int_c^{b_n} f(x) dx\end{aligned}$$

ただし, $[a_n, b_n]$ は D の近似増加列。

※ $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{a_n}^{b_n} f(x) dx$ ではまずい。

D の近似増加列 $\{S_n\}_n$ を用いて, $f(x, y) \geq 0$ のときには

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{S_n} f(x, y) dx dy$$

と定義する.

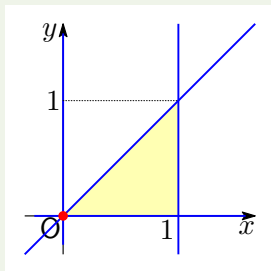
近似増加列の選び方によらず, 値は確定する
(発散する場合には正の無限大に発散する).

近似増加列のふくらみ方に無限の可能性があるので, $f(x, y) \geq 0$ としておく必要がある.

(A) $f(x, y)$ が D の一部で発散する場合

例 8.2. $\iint_D \frac{1}{\sqrt{x+y}} dx dy$, $D: 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x$.

D の図は次の通り.

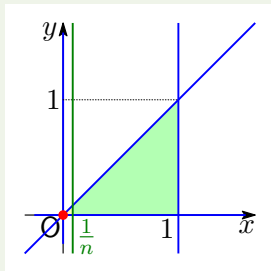


D には分母が 0 になって関数が発散する $(0, 0)$ が含まれてしまう.
近似増加列の選び方として, この点をうまく削ったものを考える.

近似増加列その1

D の近似増加列を S_n : $\frac{1}{n} \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x$ とする.

S_n の図は次の通り.



D を $x = \frac{1}{n}$ でカットした.

このとき,

$$\begin{aligned} I_n &= \iint_{S_n} \frac{1}{\sqrt{x+y}} dx dy = \int_{\frac{1}{n}}^1 \left(\int_0^x (x+y)^{-\frac{1}{2}} dy \right) dx \\ &= \int_{\frac{1}{n}}^1 \left[\frac{2}{1} (y+x)^{\frac{1}{2}} \right]_{y=0}^{y=x} dx = \int_{\frac{1}{n}}^1 2\sqrt{2x} - 2\sqrt{x} dx \\ &= \int_{\frac{1}{n}}^1 (2\sqrt{2} - 2)\sqrt{x} dx = \left[\frac{2}{3} (2\sqrt{2} - 2)x^{\frac{3}{2}} \right]_{x=\frac{1}{n}}^{x=1} \\ &= \frac{4\sqrt{2} - 4}{3} \left(1 - \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} \right). \end{aligned}$$

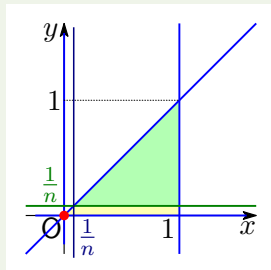
ここで, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} = 0$ であるから,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = \frac{4\sqrt{2} - 4}{3}. \quad \therefore \iint_D \frac{1}{\sqrt{x+y}} dx dy = \frac{4\sqrt{2} - 4}{3}.$$

近似増加列その2

D の近似増加列を S_n : $\frac{1}{n} \leq x \leq 1, \frac{1}{n} \leq y \leq x$ とする.

S_n の図は次の通り.



D を $y = \frac{1}{n}$ でカットした.

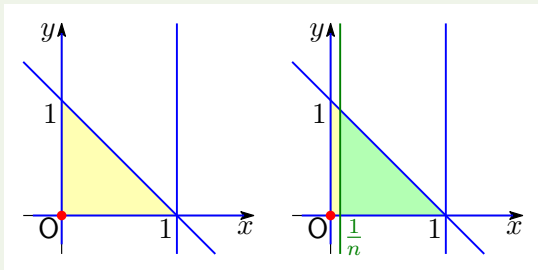
このとき,

$$\begin{aligned} I_n &= \iint_{S_n} \frac{1}{\sqrt{x+y}} dx dy = \int_{\frac{1}{n}}^1 \left(\int_{\frac{1}{n}}^x (x+y)^{-\frac{1}{2}} dy \right) dx \\ &= \int_{\frac{1}{n}}^1 \left[\frac{2}{1} (y+x)^{\frac{1}{2}} \right]_{y=\frac{1}{n}}^{y=x} dx = \int_{\frac{1}{n}}^1 2\sqrt{2x} - 2\sqrt{x+\frac{1}{n}} dx \\ &= \int_{\frac{1}{n}}^1 2\sqrt{2}\sqrt{x} - 2\sqrt{x+\frac{1}{n}} dx = \left[\frac{2}{3} 2\sqrt{2} x^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3} 2 \left(x + \frac{1}{n} \right)^{\frac{3}{2}} \right]_{x=\frac{1}{n}}^{x=1} \\ &= \frac{4\sqrt{2}}{3} \left(1 - \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} \right) - \frac{4}{3} \left\{ \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{\frac{3}{2}} - \frac{2^{\frac{3}{2}}}{n^{\frac{3}{2}}} \right\}. \\ \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} I_n &= \frac{4\sqrt{2}}{3} - \frac{4}{3}. \quad \iint_D \frac{1}{\sqrt{x+y}} dx dy = \frac{4\sqrt{2} - 4}{3}. \end{aligned}$$

例 8.3. $\iint_D \frac{1}{\sqrt{(x+y)^3}} dx dy, D: 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1-x.$

D の図は左下の通り.

D には分母が 0 になって関数が発散する $(0,0)$ が含まれてしまう.



D の近似増加列を $S_n: \frac{1}{n} \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1-x$ とする.

S_n の図は右上の通り. D を $x = \frac{1}{n}$ でカットした.

このとき,

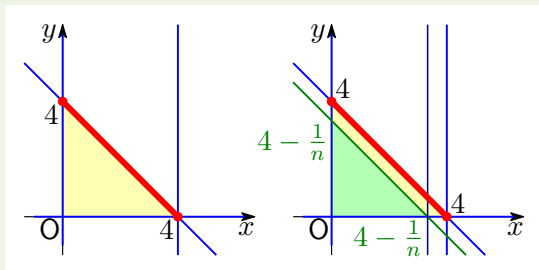
$$\begin{aligned} I_n &= \iint_{S_n} \frac{1}{\sqrt{(x+y)^3}} dx dy = \int_{\frac{1}{n}}^1 \left(\int_0^{1-x} (x+y)^{-\frac{3}{2}} dy \right) dx \\ &= \int_{\frac{1}{n}}^1 \left[\frac{2}{-1} (y+x)^{-\frac{1}{2}} \right]_{y=0}^{y=1-x} dx = \int_{\frac{1}{n}}^1 -2 + 2x^{-\frac{1}{2}} dx \\ &= \left[-2x + 2 \frac{2}{1} x^{\frac{1}{2}} \right]_{x=\frac{1}{n}}^{x=1} = -2 + \frac{2}{n} + 4 - \frac{4}{n^{\frac{1}{2}}} = 2 + \frac{2}{n} - \frac{4}{n^{\frac{1}{2}}}. \end{aligned}$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} I_n = 2. \quad \iint_D \frac{1}{\sqrt{(x+y)^3}} dx dy = 2.$$

例 8.4. $\iint_D \frac{1}{\sqrt{4-x-y}} dx dy$, $D: 0 \leq x \leq 4, 0 \leq y \leq 4-x$.

D の図は左下の通り.

D には分母が 0 になって関数が発散する $x+y=4$ 上の点が含まれる.



D の近似増加列を $S_n: 0 \leq x \leq 4 - \frac{1}{n}, 0 \leq y \leq 4 - \frac{1}{n} - x$ とする.
 S_n の図は右上の通り. D を $x+y=4 - \frac{1}{n}$ でカットした.

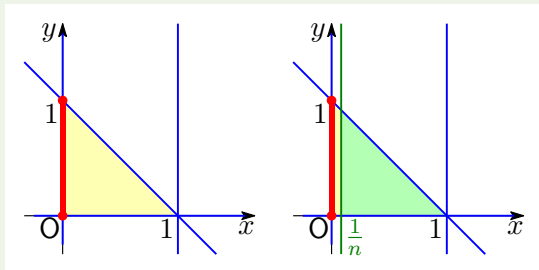
このとき,

$$\begin{aligned} I_n &= \iint_{S_n} \frac{1}{\sqrt{4-x-y}} dx dy = \int_0^{4-\frac{1}{n}} \left(\int_0^{4-\frac{1}{n}-x} (4-x-y)^{-\frac{1}{2}} dy \right) dx \\ &= \int_0^{4-\frac{1}{n}} \left[-\frac{2}{1} (4-x-y)^{\frac{1}{2}} \right]_{y=0}^{y=4-\frac{1}{n}-x} dx = \int_0^{4-\frac{1}{n}} -\frac{2}{\sqrt{n}} + 2(4-x)^{\frac{1}{2}} dx \\ &= \left[-\frac{2}{\sqrt{n}} x - 2 \frac{2}{3} (4-x)^{\frac{3}{2}} \right]_{x=0}^{x=4-\frac{1}{n}} = -\frac{2}{\sqrt{n}} \left(4 - \frac{1}{n} \right) - \frac{4}{3} \times \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} + \frac{4}{3} \times 8. \\ \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} I_n &= \frac{32}{3}. \quad \iint_D \frac{1}{\sqrt{4-x-y}} dx dy = \frac{32}{3}. \end{aligned}$$

例 8.5. $\iint_D \frac{1}{\sqrt{x^3}} dx dy$, $D: 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 - x$.

D の図は左下の通り.

D には分母が 0 になって関数が発散する $x = 0$ 上の点が含まれる.



D の近似増加列を $S_n: \frac{1}{n} \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 - x$ とする.
 S_n の図は右上の通り. D を $x = \frac{1}{n}$ でカットした.

このとき,

$$\begin{aligned} I_n &= \iint_{S_n} \frac{1}{\sqrt{x^3}} dx dy = \int_{\frac{1}{n}}^1 \left(\int_0^{1-x} x^{-\frac{3}{2}} dy \right) dx = \int_{\frac{1}{n}}^1 \left[x^{-\frac{3}{2}} y \right]_{y=0}^{y=1-x} dx \\ &= \int_{\frac{1}{n}}^1 x^{-\frac{3}{2}} (1-x) dx = \int_{\frac{1}{n}}^1 x^{-\frac{3}{2}} - x^{-\frac{1}{2}} dx = \left[-2 x^{-\frac{1}{2}} - \frac{2}{1} x^{\frac{1}{2}} \right]_{x=\frac{1}{n}}^{x=1} \\ &= -2 + 2 \left(\frac{1}{n} \right)^{-\frac{1}{2}} - 2 + 2 \left(\frac{1}{n} \right)^{\frac{1}{2}} = -4 + 2\sqrt{n} + \frac{2}{\sqrt{n}}. \end{aligned}$$

ここで, $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} = \infty$ であるから,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = \infty. \quad \therefore \iint_D \frac{1}{\sqrt{x^3}} dx dy = \infty.$$

このように発散する場合もある.

(B) $f(x, y)$ が D で連続だが無限に広がっている場合

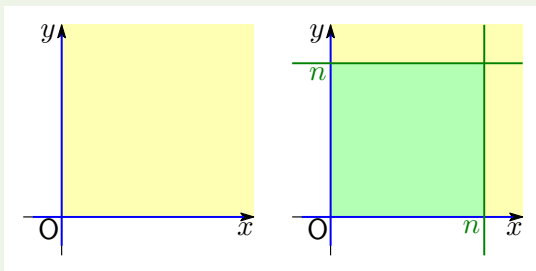
例 8.6. $\iint_D \frac{1}{(x+y+1)^6} dx dy, D: x \geq 0, y \geq 0.$

D は無限に広がっているので、途中で留めて計算しないといけない。

近似増加列その 1

D の近似増加列を $S_n: 0 \leq x \leq n, 0 \leq y \leq n$ とする。

D および S_n の図は次の通り。



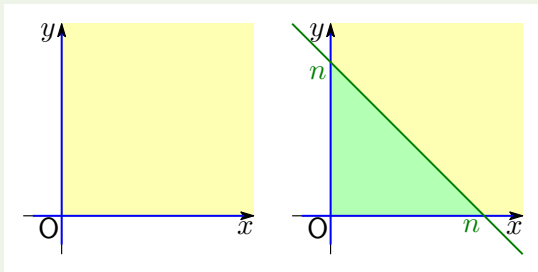
正方形になるように D をカットした。

このとき,

$$\begin{aligned} I_n &= \iint_{S_n} \frac{1}{(x+y+1)^6} dx dy = \int_0^n \left(\int_0^n (x+y+1)^{-6} dy \right) dx \\ &= \int_0^n \left[\frac{1}{-5} (y+x+1)^{-5} \right]_{y=0}^{y=n} dx \\ &= \int_0^n -\frac{1}{5} (x+n+1)^{-5} + \frac{1}{5} (x+1)^{-5} dx \\ &= \left[-\frac{1}{5} \times \frac{1}{-4} (x+n+1)^{-4} + \frac{1}{5} \times \frac{1}{-4} (x+1)^{-4} \right]_{x=0}^{x=n} \\ &= \frac{1}{20} (2n+1)^{-4} - \frac{1}{20} (n+1)^{-4} - \frac{1}{20} (n+1)^{-4} + \frac{1}{20}. \\ \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} I_n &= \frac{1}{20}. \quad \iint_D \frac{1}{(x+y+1)^6} dx dy = \frac{1}{20}. \end{aligned}$$

近似増加列その2

D の近似増加列を S_n : $0 \leq x \leq n$, $0 \leq y \leq n - x$ とする.
 D および S_n の図は次の通り.



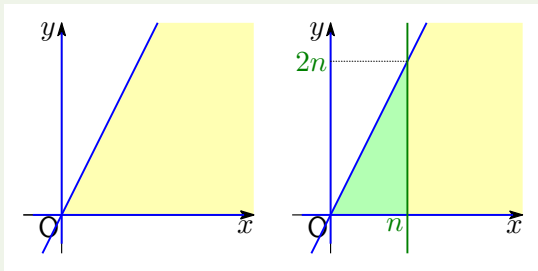
$x + y = n$ で D をカットした.

このとき,

$$\begin{aligned} I_n &= \iint_{S_n} \frac{1}{(x+y+1)^6} dx dy = \int_0^n \left(\int_0^{n-x} (x+y+1)^{-6} dy \right) dx \\ &= \int_0^n \left[-\frac{1}{5} (y+x+1)^{-5} \right]_{y=0}^{y=n-x} dx \\ &= \int_0^n -\frac{1}{5} (n+1)^{-5} + \frac{1}{5} (x+1)^{-5} dx \\ &= \left[-\frac{1}{5} (n+1)^{-5} x + \frac{1}{5} \times \frac{1}{-4} (x+1)^{-4} \right]_{x=0}^{x=n} \\ &= -\frac{1}{5} (n+1)^{-5} n - \frac{1}{20} (n+1)^{-4} + \frac{1}{20} = -\frac{4n+(n+1)}{20(n+1)^5} + \frac{1}{20}. \\ \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} I_n &= \frac{1}{20}. \quad \iint_D \frac{1}{(x+y+1)^6} dx dy = \frac{1}{20}. \end{aligned}$$

例 8.7. $\iint_D \frac{1}{(x+y+1)^3} dx dy, D: x \geq 0, 0 \leq y \leq 2x.$

D の近似増加列を $S_n: 0 \leq x \leq n, 0 \leq y \leq 2x$ とする.
 D および S_n の図は次の通り.



$x = n$ で D をカットした.

このとき,

$$\begin{aligned} I_n &= \iint_{S_n} \frac{1}{(x+y+1)^3} dx dy = \int_0^n \left(\int_0^{2x} (x+y+1)^{-3} dy \right) dx \\ &= \int_0^n \left[-\frac{1}{2} (y+x+1)^{-2} \right]_{y=0}^{y=2x} dx \\ &= \int_0^n -\frac{1}{2} (3x+1)^{-2} + \frac{1}{2} (x+1)^{-2} dx \\ &= \left[-\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{-1} (3x+1)^{-1} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{-1} (x+1)^{-1} \right]_{x=0}^{x=n} \\ &= \frac{1}{6} (3n+1)^{-1} - \frac{1}{6} - \frac{1}{2} (n+1)^{-1} + \frac{1}{2} = \frac{1}{6(3n+1)} - \frac{1}{2(n+1)} + \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} I_n = \frac{1}{3}. \quad \iint_D \frac{1}{(x+y+1)^3} dx dy = \frac{1}{3}.$$

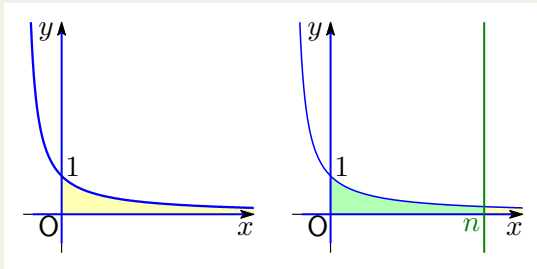
次に注意しよう.

$$\int (ax+b)^c dx = \frac{1}{a} \times \frac{1}{c+1} (ax+b)^{c+1} \quad (c \neq -1).$$

例 8.8. $\iint_D \frac{1}{(x+y+1)^2} dx dy$, $D: x \geq 0, 0 \leq y \leq \frac{1}{x+1}$.

D の近似増加列を $S_n: 0 \leq x \leq n, 0 \leq y \leq \frac{1}{x+1}$ とする.

D および S_n の図は次の通り.



$x = n$ で D をカットした.

このとき,

$$\begin{aligned} I_n &= \iint_{S_n} \frac{1}{(x+y+1)^2} dx dy = \int_0^n \left(\int_0^{\frac{1}{x+1}} (x+y+1)^{-2} dy \right) dx \\ &= \int_0^n \left[\frac{1}{-1} (y+x+1)^{-1} \right]_{y=0}^{y=\frac{1}{x+1}} dx \\ &= \int_0^n - \left(x+1 + \frac{1}{x+1} \right)^{-1} + (x+1)^{-1} dx \\ &= \int_0^n - \frac{x+1}{(x+1)^2 + 1} + (x+1)^{-1} dx \\ &= \left[-\frac{1}{2} \log((x+1)^2 + 1) + \log|x+1| \right]_{x=0}^{x=n} \\ &= \left[-\frac{1}{2} \log((x+1)^2 + 1) + \frac{1}{2} \log(x+1)^2 \right]_{x=0}^{x=n} \\ &= \left[\frac{1}{2} \log \frac{(x+1)^2}{(x+1)^2 + 1} \right]_{x=0}^{x=n} = \frac{1}{2} \log \frac{(n+1)^2}{(n+1)^2 + 1} - \frac{1}{2} \log \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

ここで,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2}{(n+1)^2 + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{(n+1)^2}} = \frac{1}{1+0} = 1$$

であるから,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = \frac{1}{2} \log 1 - \frac{1}{2} \log \frac{1}{2}. \quad \therefore \iint_D \frac{1}{(x+y+1)^3} dx dy = \frac{1}{2} \log 2.$$