マクローリン級数

$f(x)$ のマクローリン級数 (マクローリン展開) とは,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\,x^n = f(0) + f'(0)\,x + \frac{f''(0)}{2}\,x^2 + \frac{f'''(0)}{6}\,x^3 + \frac{f''''(0)}{24}\,x^4 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\,x^n + \cdots$$

のことである．関数によってはすべての x に対して $f(x)$ に一致する場合もあれば，$x=0$ の近くのみで $f(x)=0$ に一致する場合もあるし，まったく一致しない場合もある．また，一致する場合でも，x が 0 に近いところはそこまでの項を足さなくてもほぼ一致するし，x が 0 より遠いところだとほぼ一致するまでにかなりの項を足さないといけない．

いちおう GIF 画像や MP4 動画として用意したのは，以上の様子を視覚的にとらえるためのものである．作ろうと思えばだれでも作れるような代物ではあるのだが．

$$e^x \cdots \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\,x^n = 1 + x + \frac{1}{2}\,x^2 + \frac{1}{6}\,x^3 + \frac{1}{24}\,x^4 + \cdots + \frac{1}{n!}\,x^n + \cdots$$

★ すべての x で一致

$$\sin x \cdots \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\,x^{2n+1} = x - \frac{1}{6}\,x^3 + \frac{1}{120}\,x^5 - \frac{1}{5040}\,x^7 + \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\,x^{2n+1} + \cdots$$

★ すべての x で一致

$$\cos x \cdots \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}\,x^{2n} = 1 - \frac{1}{2}\,x^2 + \frac{1}{24}\,x^4 - \frac{1}{720}\,x^6 + \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n)!}\,x^{2n} + \cdots$$

★ すべての x で一致

$$\log(1+x) \cdots x - \frac{1}{2}\,x^2 + \frac{1}{3}\,x^3 - \frac{1}{4}\,x^4 + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}\,x^n + \cdots$$

★ $-1 < x < 1$ で一致

$$\begin{aligned}\sqrt{1+x} &\cdots \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}\,(2n)!}{2^{2n}\,(n!)^2\,(2n-1)}\,x^n \\ &= 1 + \frac{1}{2}\,x - \frac{1}{8}\,x^2 + \frac{1}{16}\,x^3 - \frac{5}{128}\,x^4 + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}\,(2n)!}{2^{2n}\,(n!)^2\,(2n-1)}\,x^n + \cdots\end{aligned}$$

★ $-1 < x < 1$ で一致

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{1+x}} &\cdots \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n\,(2n)!}{2^{2n}\,(n!)^2}\,x^n \\ &= 1 - \frac{1}{2}\,x + \frac{3}{8}\,x^2 - \frac{5}{16}\,x^3 + \frac{35}{128}\,x^4 + \cdots + \frac{(-1)^n\,(2n)!}{2^{2n}\,(n!)^2}\,x^n + \cdots\end{aligned}$$

★ $-1 < x < 1$ で一致

$$\frac{1}{1-x} \cdots 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots + x^n + \cdots$$

★ $-1 < x < 1$ で一致

以上．作者 鈴木敏行